NÚMEROS RACIONAIS NÃO NEGATIVOS

Tarefas para 5.º ano

(materiais de apoio ao professor)

Julho.2009

Luís Menezes
Cátia Rodrigues
Fernanda Tavares
Helena Gomes

Agradecemos a todos os professores que experimentaram com os seus alunos as tarefas que fazem parte deste documento. Agradecemos igualmente a todas as pessoas que nos deram sugestões tendo em vista o aperfeiçoamento destes materiais de apoio ao professor, em particular, a Ema Mamede.

Índice

Introdução

Este conjunto de materiais de apoio constitui uma sugestão para organizar o ensino-aprendizagem no tópico Números racionais não negativos, que é proporcionada ao professor no quadro do novo *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Naturalmente, muitas outras vias de abordagem ao tópico seriam possíveis.

Esta introdução apresenta, de modo breve, as ideias matemáticas, didácticas e curriculares fundamentais relativas a este tópico, que é indicado para o 5.º ano de escolaridade nos dois *Percursos Temáticos de Aprendizagem* já propostos (A e B).

Números racionais não negativos

O estudo dos números racionais não negativos, no 5.º ano, dá continuidade ao trabalho realizado no 1.º ciclo. Neste ciclo, os alunos desenvolvem o sentido de número racional, inicialmente a partir de situações de partilha equitativa e de divisão da unidade em partes iguais, envolvendo quantidades discretas e contínuas. Depois, o estudo destes números é aprofundado, introduzindo-se as fracções com os significados de quociente, parte-todo e operador. No 1.º ciclo, as operações com números racionais não negativos são realizadas na representação de numeral decimal, em contextos diversificados do quotidiano dos alunos.

No 5.º ano, neste tópico, espera-se que os alunos desenvolvam o sentido de número, a compreensão dos números racionais não negativos nas suas diversas representações, a compreensão das operações adição e subtracção, e a capacidade de cálculo mental e escrito. Espera-se, também, que sejam capazes de utilizar estes conhecimentos e capacidades para resolver problemas em contextos diversos. Assim, como objectivos gerais de aprendizagem, no âmbito deste tema e direccionados para este tópico, os alunos devem:

- compreender e ser capazes de usar propriedades dos números racionais;
- compreender e ser capazes de operar com números racionais e de usar as propriedades das operações no cálculo;
- ser capazes de apreciar a ordem de grandeza de números e compreender os efeitos das operações sobre os números;
- desenvolver a capacidade de estimação, de cálculo aproximado e de avaliação da razoabilidade de um resultado;

- desenvolver destrezas de cálculo numérico mental e escrito;
- ser capazes de resolver problemas, raciocinar e comunicar em contextos numéricos.

Neste tópico – números racionais não negativos –, no 5.º ano, são tratados os seguintes subtópicos: (i) Noção e representação de número racional; (ii) Comparação e ordenação; (iii) Operações (adição e subtracção); (iv) Percentagens. A representação de um número na forma de fracção, apresentada já no 1.º ciclo, é empregue aqui nos seus diversos significados: quociente entre dois números inteiros, parte-todo, razão, medida e operador. A discussão da fracção como quociente entre dois números inteiros é um bom contexto para os alunos exercitarem o algoritmo da divisão, tanto mais que este é o último a ser introduzido no 1.º ciclo. Os alunos contactam agora, pela primeira vez, com a representação de número racional não negativo na forma de numeral misto, sem contudo a usar no cálculo. Na comparação e ordenação dos números, os alunos são confrontados com situações de localização e posicionamento na recta numérica, envolvendo as múltiplas representações – sendo dado particular destaque à comparação na forma fraccionária.

No estudo das operações adição e subtracção, os alunos começam por encontrar um algoritmo para adicionar e subtrair números racionais não negativos representados por fracções, para depois estender a este conjunto numérico as propriedades estudadas na adição e subtracção de números naturais. Neste trabalho e tirando partido das propriedades das operações, é importante dar uma atenção particular ao cálculo mental (exacto e aproximado), uma vez que a desenvoltura dos alunos no cálculo é fundamental para a aprendizagem deste tema. O desembaraço no cálculo escrito com números racionais não negativos na forma de fracção pode também ser conseguido no contexto de tarefas como problemas, explorações e investigações, pelo que não existem ganhos significativos da simples, repetida e desenquadrada resolução rotineira de expressões numéricas com estas duas operações.

As percentagens são introduzidas como razões e como operadores, no contexto de situações do quotidiano dos alunos, recorrendo para isso a fracções e a numerais decimais. Neste estudo, é importante solicitar a representação de percentagens pictoricamente e usando o símbolo %. Na exploração das relações entre as várias representações de percentagem é de propor o uso da calculadora.

No trabalho destes temas matemáticos, o professor deve promover o desenvolvimento nos alunos das capacidades transversais de resolução de problemas, de raciocínio e de comunicação matemáticos e a sua utilização na construção, consolidação e mobilização dos conhecimentos. Assim, como objectivos gerais de aprendizagem relativos às capacidades transversais, neste ciclo, os alunos devem desenvolver a sua capacidade de:

- resolver problemas em contextos matemáticos e não matemáticos, adaptando, concebendo e pondo em prática estratégias variadas e discutindo as soluções encontradas e os processos utilizados;
- raciocinar matematicamente, formulando e testando conjecturas e generalizações, e desenvolvendo e avaliando argumentos matemáticos relativos a resultados, processos e ideias matemáticos;
- comunicar oralmente e por escrito, recorrendo à linguagem natural e à linguagem matemática, interpretando, expressando e discutindo resultados, processos e ideias matemáticos.

Sugestões metodológicas

O trabalho nestes tópicos reveste-se de um cunho fortemente exploratório e investigativo. Por isso, na maior parte destas aulas, os alunos trabalham em tarefas que lhes são propostas. Estas tarefas não são simples exercícios em que os alunos têm que aplicar conhecimentos previamente aprendidos, mas sim tarefas em que têm de formular estratégias próprias, ao mesmo tempo que mobilizam conhecimentos e capacidades anteriormente desenvolvidas. O trabalho nestas tarefas constitui o ponto de partida para o desenvolvimento e formalização de novos conceitos e representações, que deve ser feito, tanto quanto possível, com o contributo dos alunos. Num ou noutro momento, há também que propor a realização de exercícios, tendo em vista consolidar conhecimentos. Por vezes, esse trabalho mais rotineiro é uma parcela de um trabalho exploratório mais vasto numa determinada tarefa.

A maioria das tarefas apresentadas foi pensada para ser realizada em dois momentos – primeiro, o trabalho autónomo dos alunos, em pequenos grupos, aos pares ou individualmente, e depois, a discussão geral com toda a turma. Em alguns casos, e quando é estritamente necessário o professor dar alguma informação ou explicar algo, o trabalho autónomo dos alunos é precedido por um momento de apresentação da tarefa pelo professor, seguindo depois a aula o seu curso habitual. Dependendo da sua natureza e dos objectivos que se têm em vista, a duração da generalidade das tarefas varia entre 45 e 90 minutos, havendo algumas tarefas a necessitar de mais tempo.

Deve ter-se em atenção que o momento de discussão geral é muito importante, pois é reflectindo sobre o trabalho feito – o seu e o dos colegas –, confrontando as suas ideias com as dos outros, argumentando e analisando argumentos, que os alunos aprofundam e consolidam a sua aprendizagem. Por isso, é necessário valorizar de forma inequívoca o momento de discussão colectiva. Alguns alunos podem não ter concluído todas as questões propostas, mas poderão sempre participar na discussão das questões em que chegaram a pensar. Poderão dar também o seu contributo na discussão das outras questões. É importante que a aula tenha ritmo e que os alunos estejam sempre envolvidos. Por isso, é essencial que eles interiorizem que lhes é dado primeiro um tempo para trabalhar, previamente definido, havendo depois um tempo para discutir.

No momento da discussão geral é importante que todos os alunos tenham possibilidade de participar. Mas não é necessário que todos os alunos/todos os pares/todos os grupos apresentem o seu trabalho, em especial nos casos em que esse trabalho nada acrescenta ao que já foi anteriormente apresentado pelos colegas. Esta dinâmica de aula propicia a análise das situações matematicamente significativas e promove o desenvolvimento desta capacidade e da capacidade de comunicação no aluno. Noutras tarefas e noutras situações, os alunos que não tiverem oportunidade de mostrar desta vez o que fizeram, poderão ser os primeiros a mostrar o seu trabalho.

A discussão geral da tarefa deve conduzir ao desenvolvimento e formalização de conceitos matemáticos, da sua terminologia e da sua notação. Por isso, é fundamental que a aula termine com boas sínteses, tanto orais como escritas, que reflictam o trabalho desenvolvido. Este é também um momento da aula que o professor pode usar para propor algumas tarefas de consolidação.

Em muitos casos, o professor terá que adaptar as tarefas às características das suas turmas. Isso pode envolver eliminar uma ou outra questão, ajustando assim o que é proposto ao que se pode esperar do trabalho autónomo dos alunos em 45-60 minutos, de modo a deixar um tempo aceitável para a discussão. Em certas turmas, pode ser adequado dividir uma tarefa em duas partes, propondo aos alunos a realização de trabalho autónomo, seguida de um momento de discussão, depois trabalho autónomo de novo, e, finalmente, nova discussão geral. O sistema de deixar os alunos trabalhar autonomamente durante uma aula, adiando a discussão para a aula seguinte, de um modo geral, é pouco eficiente, pois os alunos dificilmente têm presente o trabalho anteriormente feito com a mesma vivacidade. Deste modo, a discussão geral, uma parte muito importante do trabalho, acaba por ser menos rica e participada do que seria desejável.

Estrutura dos materiais de apoio

Destes materiais de apoio fazem parte: (i) uma proposta de planificação geral para esta unidade didáctica; (ii) um conjunto de tarefas em que, para além da proposta de trabalho para os alunos, são dadas indicações para o professor.

No desenvolvimento de cada uma das tarefas, os *Conhecimentos prévios dos alunos* apresentam os conhecimentos e capacidades que os alunos devem possuir para poderem trabalhar na tarefa indicada. No caso de os alunos não dominarem de modo satisfatório esses conhecimentos, o professor deve rever com eles as ideias principais ou propor-lhes a realização de um trabalho preliminar apropriado. Este aspecto deve merecer particular cuidado na fase de transição dos Programas de Matemática.

Nas *Aprendizagens visadas* são indicados os principais objectivos de aprendizagem que se têm em vista com o trabalho dos alunos na tarefa proposta. Estes objectivos correspondem a uma parte dos objectivos do tópico e das capacidades transversais – resolução de problemas, raciocínio e comunicação matemáticos – indicados no *Programa de Matemática*.

As *Orientações para apresentação e exploração da tarefa* contêm sugestões sobre o modo de estruturar e conduzir a aula, chamando a atenção para alguns problemas que podem surgir. Para além das indicações gerais sobre a organização da aula, estas orientações contêm aspectos da exploração matemática da tarefa, com eventual indicação de alguns dos erros mais comuns dos alunos. As indicações suplementares contêm informações adicionais úteis para o professor e extensões da tarefa proposta ou mesmo questões adicionais para colocar ao aluno, se for caso disso.

Finalmente, as *Possíveis explorações dos alunos* contêm exemplos de situações ocorridas ou susceptíveis de ocorrer na sala de aula, que ilustram a variedade de estratégias que eles podem usar na realização da tarefa. Estas situações dão pistas ao professor sobre o modo de orientar o seu trabalho e ajudam a prepará-lo para lidar com a diversidade de respostas dos seus alunos que pode vir a encontrar.

Proposta de planificação e tarefas

Números racionais não negativos (5.º Ano)

Subtópicos	Objectivos	Tarefas	Tempo (min.)
Noção e representação de número racional	▪ Compreender e usar um número racional como quociente, relação parte-todo, razão e medida. ▪ Identificar e dar exemplos de fracções equivalentes a uma dada fracção e escrever uma fracção na sua forma irredutível.	**Dobras e mais dobras**	90+45
Noção e representação de número racional	▪ Compreender e usar um número racional como quociente, relação parte-todo, razão e operador. ▪ Identificar e dar exemplos de fracções equivalentes a uma dada fracção e escrever uma fracção na sua forma irredutível. ▪ Representar sob a forma de fracção um número racional não negativo dado por uma dízima finita.	**Biscoitos em migalhas**	90
		À descoberta da tira	45
Noção e representação de número racional	▪ Compreender e usar um número racional como quociente. ▪ Representar sob a forma de fracção um número racional não negativo dado por uma dízima finita.	**Investigando dízimas**	90+45
Comparação e ordenação	▪ Comparar e ordenar números racionais representados de diferentes formas. ▪ Localizar e posicionar na recta numérica um número racional não negativo representado nas suas diferentes formas.	**Ao ataque!**	90
Comparação e ordenação	▪ Comparar e ordenar números racionais representados de diferentes formas. ▪ Localizar e posicionar na recta numérica um número racional não negativo representado nas suas diferentes formas. ▪ Resolver problemas que envolvam números racionais não negativos.	**Quem tem razão?**	90
Operações (adição e subtracção)	▪ Adicionar e subtrair números racionais não negativos representados em diferentes formas. ▪ Resolver problemas que envolvam números racionais não negativos.	**Terrenos nas aldeias**	90+90
Operações (adição e subtracção)	▪ Adicionar e subtrair números racionais não negativos representados em diferentes formas. ▪ Resolver problemas que envolvam números racionais não negativos.	**Triângulo harmónico**	90

Operações (adição e subtracção)	▪ Adicionar e subtrair números racionais não negativos representados em diferentes formas.	**Quadrados sombreados... até ao infinito**	90
Percentagem	▪ Compreender a noção de percentagem e relacionar diferentes formas de representar uma percentagem. ▪ Calcular e usar percentagens. ▪ Traduzir uma fracção por uma percentagem e interpretá-la como o número de partes em 100.	**Desconto de desconto**	45
		Descontos na Bit-@-byte	45
Percentagem	▪ Calcular e usar percentagens. ▪ Resolver problemas que envolvam números racionais não negativos.	**Investigando percentagens no corpo humano**	90
	▪ Utilizar estratégias de cálculo mental.	**Jogo de cálculo mental**	45

Dobras e mais dobras

1. Encontra três tiras de papel geometricamente iguais. Dobra-as em partes iguais: a primeira em duas, a segunda em quatro e a terceira em oito. Depois de dobrares cada uma das tiras, representa de diferentes formas as partes obtidas.
2. Compara as partes das três tiras obtidas por dobragem. Regista as tuas conclusões.
3. Em cada uma das tiras, determina a razão entre cada um dos comprimentos das partes obtidas após as dobragens e o comprimento da tira. Experimenta fazer o mesmo para a largura da tira. Regista as tuas conclusões.

Dobras e mais dobras

Conhecimentos prévios dos alunos

Com o trabalho desenvolvido no 1.º ciclo, os alunos devem:

- Compreender fracções com os significados quociente, parte-todo e operador;
- Ser capazes de:
  - Identificar a metade, a quarta parte e outras partes da unidade e representá-las na forma de fracção;
  - Comparar e ordenar números representados na forma decimal.

Aprendizagens visadas

Com o seu trabalho nesta tarefa, os alunos devem:

- Compreender e usar um número racional como relação parte-todo, razão e medida;
- Ser capazes de:
  - Identificar e dar exemplos de fracções equivalentes a uma dada fracção e escrever uma fracção na sua forma irredutível;
  - Explicar e justificar os processos, resultados e ideias matemáticos, recorrendo a exemplos e contra-exemplos;
  - Representar informações e ideias matemáticas de diversas formas.

Orientações para apresentação e exploração da tarefa

Indicações gerais. Esta tarefa permite aos alunos reconhecer, usar e relacionar múltiplas representações de números racionais não negativos (fracção, decimal e percentagem). A tarefa permite desenvolver igualmente diversos sentidos das fracções, sendo dois deles predominantes: parte-todo (pontos 1 e 2 da tarefa, no contexto de um modelo contínuo) e razão (ponto 3, numa situação de medida de comprimentos).

Esta tarefa é realizada num bloco e meio, sendo os primeiros 90 minutos para a exploração dos pontos 1 e 2 (45 são para a sua resolução, em pares, e os restantes para a apresentação e discussão de resultados e sistematização de ideias) e o meio bloco para a exploração do ponto 3, uma vez que nos pontos 1 e 2 da tarefa se trabalha um sentido da fracção e no ponto 3 outro.

Dado que as conclusões da tarefa são independentes das dimensões das tiras, é pertinente o uso de conjuntos de tiras diferentes. Desta forma, realça-se o facto de a mesma fracção poder representar porções de tiras diferentes. Já no ponto 3 da tarefa, é conveniente que os alunos usem tiras de dimensões que permitam exprimir cada uma das partes obtidas, por dobragem, através de uma razão entre números inteiros não negativos (por exemplo, usar uma tira de dimensões $16\ cm \times 4\ cm$), deixando para momento posterior o estudo de razões entre números não inteiros.

Exploração da tarefa. No ponto 1, os alunos têm necessidade de dividir as tiras de papel em partes geometricamente iguais: uma em duas, outra em quatro e a terceira em oito. Os alunos começam por dobrar a tira ao meio (divisão em duas partes geometricamente iguais). Para a divisão das outras duas tiras, os alunos voltam a usar, sucessivamente, o mesmo procedimento (divisão em 4 e em 8 partes geometricamente iguais).

Os alunos, mobilizando os conhecimentos adquiridos no 1.º ciclo sobre os números racionais não negativos, representam as partes obtidas. Assim, é natural que utilizem representações como: 1/2; 0,5; metade; 50%; 1/4; 0,25; um quarto; 25%; … Já não será tão natural que os alunos apresentem representações como, por exemplo, 3/4 ou 5/8. Deste modo, é importante o professor explorar as diferentes representações de cada número e a equivalência entre elas. Este trabalho é conduzido para focar a atenção dos alunos na compreensão e representação do número racional não negativo na forma de fracção. Os alunos compreendem que a fracção traduz uma relação entre a parte e o todo, onde o todo é a tira de papel e as partes são as porções de tira consideradas pelos alunos (por exemplo, uma de duas, em 1/2, ou 3 de 8, em 3/8). Neste sentido da fracção como parte-todo, o professor introduz a notação e a terminologia, identificando o número de partes iguais em que a unidade está dividida com o denominador da fracção e o número de partes escolhidas com o numerador da fracção. É importante que os alunos compreendam que a unidade (a tira) é representada por uma fracção em que o numerador é igual ao denominador. Na representação de cada uma das partes da tira (através de fracções unitárias), os alunos concluem também que à medida que o número de dobras aumenta (denominador), e uma vez que o numerador é o mesmo, a parte da tira que se obtém por dobragem é cada vez menor.

No ponto 2 da tarefa, os alunos marcam cada um dos vincos que se obtém pela dobragem de cada uma das tiras, colocando em seguida as tiras alinhadas. Nesta fase, os alunos comparam partes das tiras. Naturalmente, concluem da equivalência de fracções que representam metade da tira: $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}$. Por observação das tiras, os alunos identificam outras fracções equivalentes: $\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$; $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$, analisando os termos das fracções tendo em conta as dobragens feitas. É importante frisar que 1/2 de uma tira e 2/4 de outra tira só representam fracções equivalentes quando as tiras são congruentes. Reflectindo ainda sobre as dobragens sucessivas, os alunos compreendem que cada parte da tira representa metade da anterior, ou seja, $\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}:2$; $\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$; $\frac{1}{8}=\frac{1}{4}:2$. Neste sentido, o professor sublinha então que "a metade da metade é a quarta parte", "a metade de um quarto é um oitavo". É igualmente possível estabelecer outras comparações, como por exemplo: 1/2 é o dobro de 1/4 e o quádruplo de 1/8, simbolicamente: $\frac{1}{2}=2\times\frac{1}{4}=4\times\frac{1}{8}$; 1/4 é o dobro de 1/8, simbolicamente: $\frac{1}{4}=2\times\frac{1}{8}$; 3/4 é maior que 5/8, simbolicamente: $\frac{3}{4}>\frac{5}{8}$; 1/2 é menor que 7/8, simbolicamente: $\frac{1}{2}<\frac{7}{8}$.

Em resultado deste trabalho com as tiras, o professor sistematiza o conceito de fracção equivalente e a sua notação. No caso de as fracções não serem equivalentes, o professor sugere que a comparação entre os números seja representada em termos de desigualdade; por exemplo, $\frac{3}{4}>\frac{1}{2}$.

A terceira parte da tarefa é trabalhada pelos alunos depois de terem discutido as duas primeiras, uma vez que se pretende introduzir a fracção como razão. Os alunos comparam cada uma das duas dimensões das partes das tiras com as da tira (unidade), primeiro o comprimento e depois a largura, escrevendo as respectivas razões. Considerando a primeira tira, a razão entre o comprimento de cada uma das partes obtidas e o da tira é 8/16. Nesta fase, os alunos identificam 8/16 como 1/2, ou seja, as duas dimensões estão na razão de 1 para 2 ou uma é metade da outra. Na segunda tira encontram a razão 4/16, ou seja, 1/4 e na terceira 2/16, ou seja, 1/8. Neste sentido, o professor sublinha que a razão $\frac{a}{b}$, com $b\neq 0$, traduz uma comparação multiplicativa entre duas grandezas. Quanto à dimensão *largura*, os alunos concluem que a razão entre a largura de cada uma das partes e a da tira é de 1, já que a dobragem efectuada na tira apenas faz variar o seu comprimento.

Indicações suplementares. Na fase de discussão da primeira parte da tarefa, para ampliar a exploração da regularidade encontrada na relação entre o número de dobragens e o número de divisões na tira, o professor coloca algumas questões, como por exemplo: Uma tira é dobrada, sucessivamente, ao meio de modo a que cada uma das partes representa 1/108 da tira inicial. Quantas dobragens da tira foram feitas?

O professor sugere, como extensão da parte 3, que os alunos verifiquem se as razões entre a área de cada uma das tiras obtidas por dobragem e a área da tira inicial correspondem às razões encontradas para os comprimentos.

Aquando da abordagem das operações adição e subtracção de números racionais não negativos, o professor tem também oportunidade de retomar o ponto 2 da tarefa para sugerir aos alunos que, a partir da observação das tiras dobradas, determinem, por exemplo:

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{8}; \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{8}; \qquad 1-\frac{1}{4}.$$

Esta tarefa revela também potencialidades no estudo da comparação e ordenação de números racionais não negativos. Neste sentido, usam-se as tiras e as respectivas dobras para posicionar na recta numérica números racionais não negativos, tomando como unidade o comprimento da tira, como, por exemplo: 5/8, 7/4, assim como comparar, por exemplo, 1/2 e 4/8, 3/4 e 5/8.

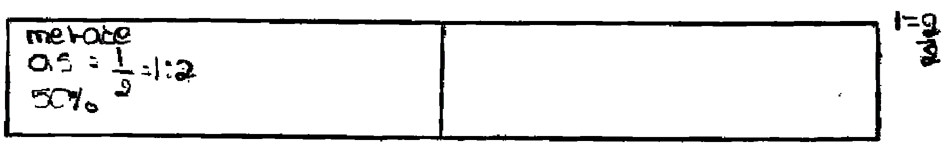
Na exploração dos pontos 2 e 3 da tarefa é igualmente pertinente fazer uso de outros modelos, como o circular e também envolvendo quantidades discretas.

O professor pode também explorar situações como as apresentadas nas cartas números 25, 29 e 30 do jogo de cálculo mental *Men-Tal* desta publicação, de forma a consolidar os sentidos da fracção trabalhados nesta tarefa.

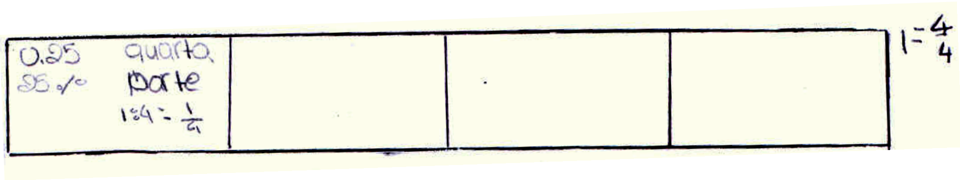
Possíveis explorações dos alunos

Na exploração da tarefa, os alunos (i) representam de diferentes formas as partes de cada uma das tiras que se obtêm após a dobragem; (ii) comparam as respectivas partes; e (iii) determinam a razão entre as dimensões de cada uma das partes da tira e a tira inicial.

Na primeira parte da tarefa, os alunos, após a dobragem da tira em duas partes iguais, apresentam diversas representações para cada uma das partes: "metade", "$\frac{1}{2}$", "0,5" ou "50%" da tira inicial.



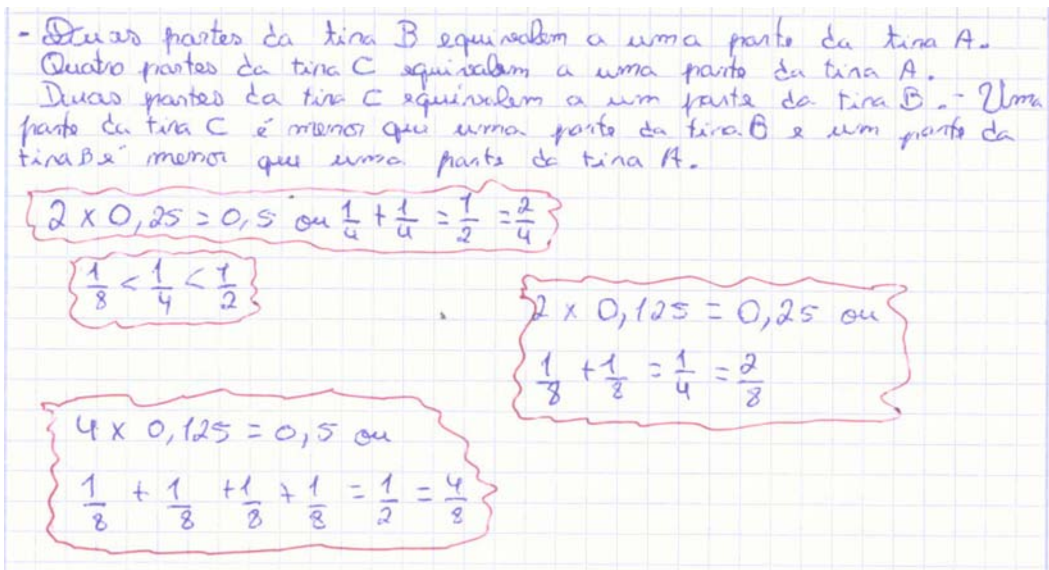
De forma análoga, os alunos concluem que cada uma das partes resultantes da dobragem da tira em 4 partes geometricamente iguais representa “a quarta parte”, “$\frac{1}{4}$”, “0,25” ou “25%” da tira original.



Os alunos representam também outras partes da tira como $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{4}$. Finalmente, concluem que cada uma das partes da tira que se obtém ao dobrá-la em 8 partes geometricamente iguais representa “um oitavo”, “$\frac{1}{8}$”, “0,125” ou “12,5%” da tira.

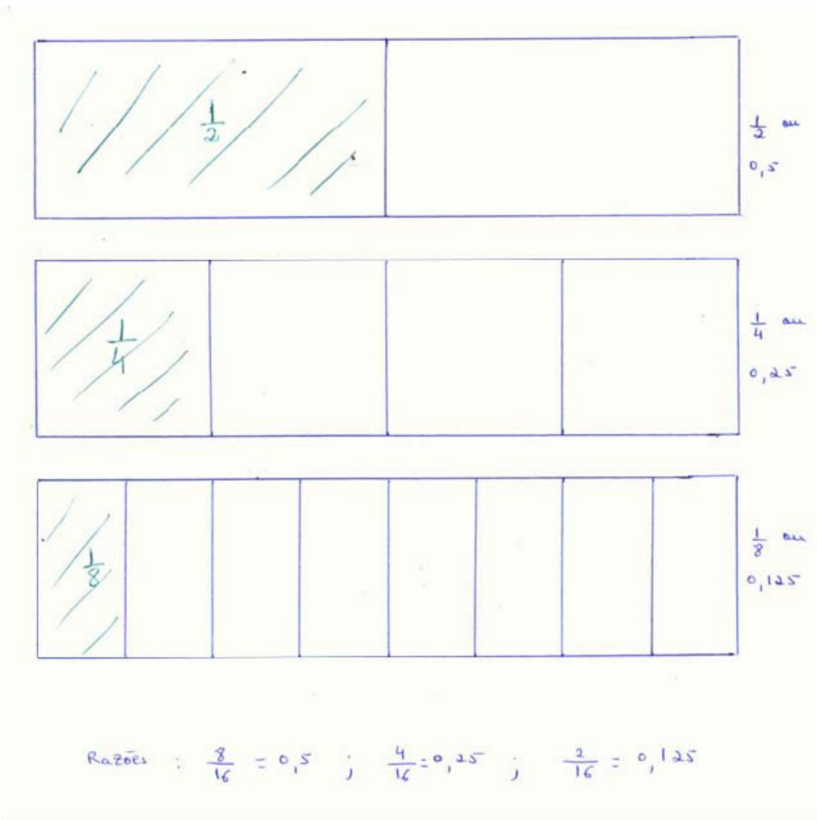
Os alunos representam também outras partes da tira como, $\frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}$.

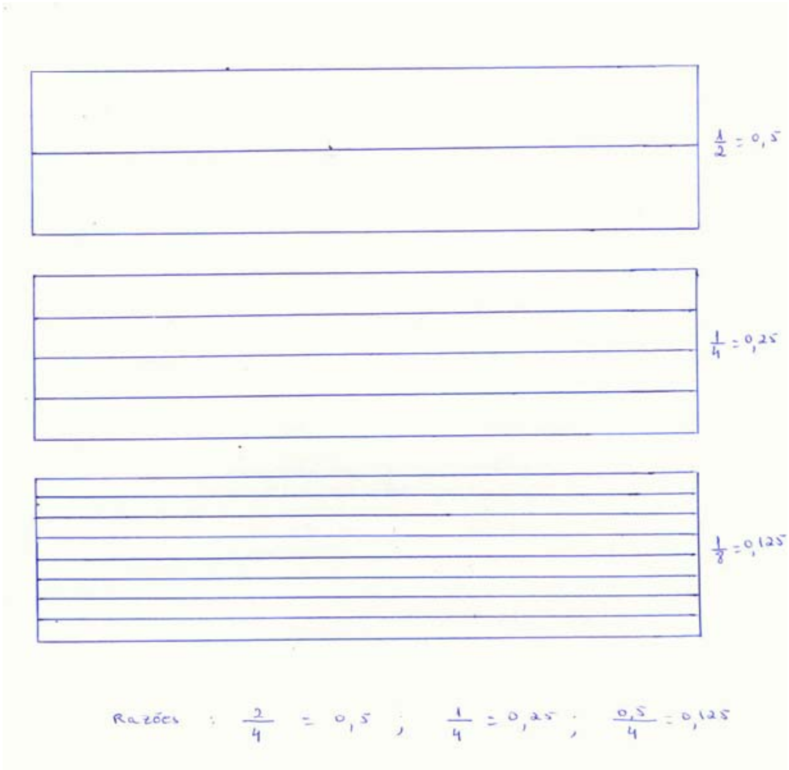
No segundo ponto da tarefa – *Compara as partes das três tiras obtidas por dobragem*. Regista as tuas conclusões – os alunos estabelecem distintas relações, expressando equivalências e desigualdades entre fracções:



O oitavo é metade da quarta-parte.
A quarta-parte é metade da metade,
O oitavo é a quarta-parte da metade,
A metade é o dobro da quarta-parte.
A quarta-parte é o dobro do oitavo
A metade é o quádruplo do oitavo
O numerador é sempre 1.
Em fracção com o numerador igual, quanto o maior é o denominador mais pequeno é a fracção.

Na terceira parte da tarefa, a diversidade das respostas depende das dimensões das tiras usadas e da posição em que a tira é dobrada. Contudo, as conclusões mantêm-se inalteradas.





Conclusão : As razões da dimensão da largura e do comprimento são as mesmas.

Os alunos concluem que a razão entre o comprimento de cada uma das partes e o da tira corresponde ao valor encontrado na primeira questão.

Biscoitos em migalhas

A Marta vai ter uns amigos em casa no fim-de-semana, mas ainda não sabe bem quem virá. Por isso, resolveu comprar um saco de biscoitos *"Caladinhos"*[1] e sumos de laranja. No saco dos biscoitos está escrito: "12 unidades".

Se ela resolver dividir igualmente os biscoitos por todos, quanto caberá a cada um?

[1] Os *Caladinhos* são biscoitos de consistência mole, com uma forma circular (com diâmetro aproximado de 14 cm) e achatados.

Biscoitos em migalhas

Conhecimentos prévios dos alunos

Com o trabalho desenvolvido no 1.º ciclo, os alunos devem:

- Compreender fracções com os significados quociente, parte-todo e operador;
- Ser capazes de:
    - Ler e escrever números na representação decimal (até à milésima) e relacionar diferentes representações dos números racionais não negativos.

Aprendizagens visadas

Com o seu trabalho nesta tarefa, os alunos devem:

- Compreender e usar um número racional como quociente;
- Ser capazes de:
    - Identificar e dar exemplos de fracções equivalentes a uma dada fracção e escrever uma fracção na sua forma irredutível;
    - Representar sob a forma de fracção um número racional não negativo dado por uma dízima finita;
    - Discutir resultados, processos e ideias matemáticos.

Orientações para apresentação e exploração da tarefa

Indicações gerais. Esta tarefa de exploração decorre num bloco de 90 minutos, em duas partes. Na primeira parte, após a distribuição do enunciado, os alunos trabalham autonomamente durante cerca de 45 minutos, aos pares ou em pequenos grupos. Na segunda parte, com uma duração aproximada de 45 minutos, faz-se a apresentação, discussão e sistematização de ideias e de formas de representação de números racionais não negativos no grupo-turma.

Com esta tarefa pretende-se que os alunos desenvolvam o sentido de número racional iniciado no ciclo anterior, aprofundando o significado de fracção como quociente exacto entre dois números inteiros não negativos ($\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$), que surge como partilha equitativa; o numerador *"a"* representa o número de *coisas* a serem partilhadas e o denominador "*b*" o número de elementos por quem se partilha. A fracção representa, pois, a quantidade de *coisa* que cada um recebe depois da partilha (o quociente, resultado da divisão), mas representa igualmente uma relação entre duas quantidades (significado de fracção como razão). É importante que se associe a representação fraccionária do número racional não negativo à decimal, estabelecendo-se relações entre elas, destacando-se em cada situação as vantagens e desvantagens da utilização de uma e de outra.

Esta tarefa leva os alunos a trabalhar uma situação em que só se conhece o número de biscoitos (12). O facto de o número de amigos estar indefinido pode colocar aos alunos algumas dificuldades na primeira abordagem à tarefa. Nesse momento, o professor acompanha de perto os alunos, sublinhando que a Marta não sabe quantos amigos virão no fim-de-semana, e que, portanto, têm que encontrar uma estratégia de resolução que tenha isso em conta.

Exploração da tarefa. É natural que os alunos comecem por dividir os 12 biscoitos por números menores que 12, que correspondem aos números de pessoas que estão em casa (Marta e amigos). O professor incentiva os alunos a representar o quociente, que corresponde ao número de biscoitos que cabe a cada um, de diversas formas. Assim, os alunos representam cada quociente através de fracção, de numeral decimal (quando possível), de numeral misto ou de número inteiro. O professor leva os alunos a concluir em que casos o quociente é um número inteiro (quando o dividendo/numerador é múltiplo do divisor/denominador) e em que outros é um número fraccionário. Nestes últimos casos, é de evidenciar que esses números fraccionários originam tanto dízimas infinitas (por exemplo, 12/11) como dízimas finitas (por exemplo, 12/8) – este aspecto é retomado na tarefa *Investigando dízimas*. Nas dízimas infinitas, é importante mostrar que elas são periódicas, ou seja, que existe um algarismo ou conjunto de algarismos que se repete (período) e introduzir a sua representação (por exemplo, 12/11 ou 1,090909... ou 1,(09)). Em relação às dízimas, sublinhar que só as finitas podem ser escritas como fracções decimais (por exemplo, 12/8 ou 1,5 ou 15/10).

Nas situações em que os alunos consideram um número de jovens menor do que 12, e o quociente não é inteiro, o professor introduz a representação de numeral misto. Nesse caso (por exemplo, 12/9), os alunos dão conta que o quociente inteiro corresponde a 1 (1 biscoito para cada um dos jovens) e que ainda sobram 3 biscoitos que serão divididos pelos 9 jovens. Cada um receberá mais 3/9 ou 1/3 de um biscoito – o professor questiona os alunos sobre que situação escolheriam; a primeira (em que dividiam cada um dos biscoitos em 9 partes iguais) ou a segunda (em que cada biscoito é dividido em 3 partes iguais). No primeiro exemplo surge o numeral misto $1\frac{3}{9}$ e no segundo $1\frac{1}{3}$. O professor aproveita a ocasião para evidenciar a equivalência de comer 1/3 e 3/9 (fracções equivalentes), embora seja de sublinhar que isso corresponde a divisões diferentes dos biscoitos; a primeira representação refere-se à divisão de um biscoito em 3 partes iguais e a segunda à divisão de três biscoitos em 9 partes iguais. A propósito do numeral misto, é pertinente o professor questionar os alunos sobre a utilização desta representação de números racionais não negativos no seu dia-a-dia, identificando-se alguns exemplos.

Na exploração da tarefa é necessário que o professor vinque a ideia de que para realizar alguns cálculos os alunos devem recorrer ao cálculo mental (por exemplo, 12/10; 12/8; 12/6) e em outros ao cálculo escrito (por exemplo, 12/11; 12/7). No primeiro caso, é uma boa oportunidade para recordar estratégias de cálculo mental. No segundo caso, é também uma boa oportunidade de continuar o trabalho com o algoritmo da divisão, que é o mais complicado para os alunos e aquele que no ciclo anterior é introduzido mais tarde.

No caso de os alunos não considerarem mais do que 12 pessoas, o professor incentiva-os a fazê-lo. Essa é uma forma de fazer surgir números racionais menores do que a unidade e de sublinhar que isso implica que os numeradores das fracções sejam menores que os denominadores. O professor pode aproveitar esta situação para estabelecer uma relação entre o numerador, o denominador da fracção e o quociente respectivo. Por exemplo, os alunos devem compreender que quando dividem 12 biscoitos por 24 pessoas, cada pessoa recebe 1/2 de um biscoito, porque 12 é metade de 24.

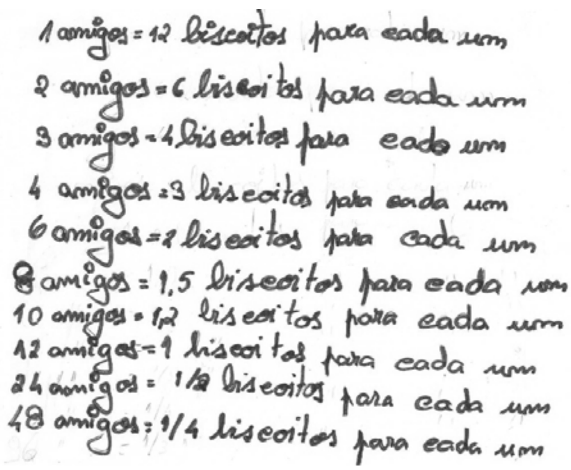
Ao longo da tarefa, é importante que o professor desafie os alunos a acompanhar as fracções e numerais decimais por representações icónicas. A utilização de múltiplas representações contribui para a compreensão do conceito de número racional não negativo.

Indicações suplementares. A partir da situação apresentada, o professor pode explorar situações que permitem estabelecer conexões com a Geometria. Pode, por exemplo, colocar questões como: Se a mãe da Marta cozer os *Caladinhos* no seu fogão em tabuleiros rectangulares de dimensões 40 cm por 65 cm, quantos consegue cozer em cada tabuleiro? A mãe da Marta polvilha os tabuleiros com farinha. Compara a porção da superfície do tabuleiro que fica com a farinha à vista com a superfície do tabuleiro ocupada com os biscoitos, depois de cozidos.

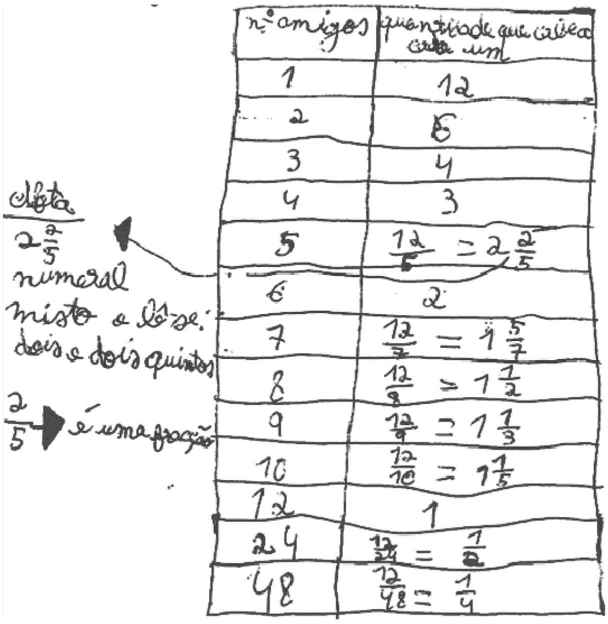
Possíveis explorações dos alunos

Os alunos começam por dividir 12 (biscoitos) pelos números naturais menores ou iguais a 12 (pessoas). Reparam que em alguns casos (12, 6, 4, 3, 2 e 1 pessoas) o resultado é um número inteiro; em todos os outros casos o quociente é um número fraccionário: “Há situações em que é necessário partir alguns biscoitos”.

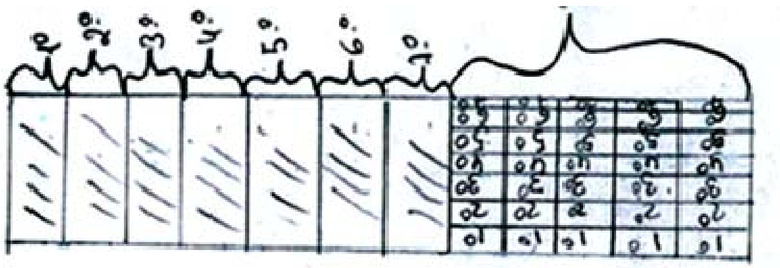
Por estimativa, dão conta que para um divisor entre 12 e 6 (exclusive) o quociente é um número que varia entre 1 e 2 (aproxima-se de dois quando o número de pessoas se aproxima de 6). Para 5 pessoas, o quociente já é maior que 2 mas inferior a 3. Depois disso, os alunos calculam os quocientes de 12 por outros números naturais menores que 12 – alguns alunos consideram-nos todos – recorrendo ao algoritmo da divisão nos casos em que isso se justifica. Alguns alunos só consideram números de pessoas menores que 12, enquanto outros consideram também números maiores.


1 amigos = 12 biscoitos para cada um
2 amigos = 6 biscoitos para cada um
3 amigos = 4 biscoitos para cada um
4 amigos = 3 biscoitos para cada um
6 amigos = 2 biscoitos para cada um
8 amigos = 1,5 biscoitos para cada um
10 amigos = 1,2 biscoitos para cada um
12 amigos = 1 biscoitos para cada um
24 amigos = 1/2 biscoitos para cada um
48 amigos = 1/4 biscoitos para cada um

A representação dos números é muito diversificada, coexistindo os numerais decimais, as fracções e também os numerais mistos. O trabalho do professor com os grupos levou os alunos a fazerem registos em que distinguem o numeral misto da fracção. A maneira como os alunos apresentam os resultados é variada, embora predomine a tabela:



A representação do número de biscoitos a distribuir a cada pessoa é em algumas resoluções icónica, como na figura seguinte, em que os alunos representam a divisão de 12 por 7, na forma de 1 biscoito e 5/7 de biscoito:



Como forma de sistematizar o trabalho realizado, resulta o quadro-síntese seguinte, feito para um número de pessoas menor ou igual a 12 (é igualmente importante fazer a exploração com números de pessoas superiores a 12):

Biscoitos	**N.º de pessoas**	**Fracção**	**Quociente**	**Número**	**Dízima**	**Numeral decimal**	**Numeral misto**
12	1	12/1	12	Inteiro	-	-	-
12	2	12/2	6	Inteiro	-	-	-
12	3	12/3	4	Inteiro	-	-	-
12	4	12/4	3	Inteiro	-	-	-
12	5	12/5	2,4	Fraccionário	Finita	2,4	$2\frac{2}{5}$
12	6	12/6	2	Inteiro	-	-	-
12	7	12/7	1,714286…	Fraccionário	Infinita Periódica	Não é possível representar	$1\frac{5}{7}$
12	8	12/8	1,5	Fraccionário	Finita	1,5	$1\frac{4}{8}$

12	9	12/9	1,333333…	Fraccionário	Infinita Periódica	Não é possível representar	$1\frac{3}{9}$
12	10	12/10	1,2	Fraccionário	Finita	1,2	$1\frac{2}{10}$
12	11	12/11	1,090909…	Fraccionário	Infinita Periódica	Não é possível representar	$1\frac{1}{11}$
12	12	12/12	1	Inteiro	-	-	-

À descoberta da tira[2]

Se a figura seguinte

representar $\frac{3}{4}$ de uma tira de papel, representa $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$ e $\frac{3}{2}$ dessa mesma tira.

Explica o teu raciocínio.

[2] Tarefa inspirada em NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.

À descoberta da tira

Conhecimentos prévios dos alunos

Com o trabalho desenvolvido no 1.º ciclo, os alunos devem:

- Compreender fracções com os significados parte-todo e operador;
- Ser capazes de:
  - Reconstruir a unidade a partir das suas partes.

Aprendizagens visadas

Com o seu trabalho nesta tarefa, os alunos devem:

- Compreender e usar um número racional como parte-todo e operador;
- Ser capazes de:
  - Interpretar a informação e ideias matemáticas representadas de diversas formas;
  - Exprimir ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito, usando a notação, simbologia e vocabulário próprios.

Orientações para apresentação e exploração da tarefa

Indicações gerais. Com este problema pretende-se que os alunos, a partir dos conhecimentos que já possuem, compreendam os números racionais não negativos como relação parte-todo e como operador e os usem na reconstrução e na divisão da unidade.

Nesta situação, o número racional não negativo no sentido de operador surge num contexto de modelo contínuo. A partir da figura inicial, obtêm-se outras figuras com a mesma forma e com comprimentos diferentes.

Esta tarefa tem a duração de cerca de 45 minutos, onde 20 minutos são destinados ao trabalho autónomo dos alunos e os restantes para a discussão e sistematização de ideias. O trabalho pode ser realizado a pares ou individualmente. No caso de ser realizado individualmente, antes da discussão em grande-grupo, é de prever a troca de impressões entre pares de alunos.

Na realização da tarefa os alunos começam por reproduzir no papel quadriculado a tira do enunciado (corresponde a um rectângulo de 9 quadrículas de comprimento por 3 quadrículas de largura).

Exploração da tarefa. Na abordagem a esta tarefa, os alunos têm que compreender que a figura representa $\frac{3}{4}$ de uma tira de papel, ou seja, da unidade, o que significa que para responder têm que, numa primeira fase, reconstruir a unidade. Para tal, os alunos mobilizam os seus conhecimentos sobre números racionais não negativos como relação parte-todo.

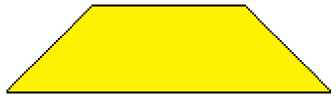
Os alunos sabem que a unidade original foi dividida em 4 partes geometricamente iguais e dessas consideraram-se 3; logo, a figura representa três vezes um quarto. Assim, para reconstruir a unidade, os alunos dividem a tira em 3 partes geometricamente iguais (três é o numerador da fracção, que representa o número de partes consideradas) para identificarem um quarto (quatro é o denominador da fracção, que representa o número de partes iguais em que a unidade foi dividida) e desenham uma nova figura com 4 dessas partes.

Note-se que é comum os alunos considerarem a tira representada na figura como sendo a unidade e, portanto, começarem por dividi-la em 4 partes iguais e tomarem 3 dessas partes. Neste caso, é importante o professor colocar questões que levem os alunos a compreender que a tira de papel não é a unidade mas uma parte dela, tais como: O que representa a tira? 3/4 da tira é mais ou menos do que a unidade? Desta forma, reforça-se o conceito de unidade e o sentido parte-todo que é evidenciado nesta tarefa pela representação do número sob a forma de fracção.

Na representação, na tira, de $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$, os alunos concluem que a figura resultante é menor do que a unidade, uma vez que o numerador é menor que o denominador. Na representação de $\frac{4}{3}$ e $\frac{3}{2}$ da tira, a figura obtida é maior do que a unidade, já que os numeradores são maiores que os denominadores respectivos. Para evidenciar também o sentido da fracção como operador, é importante relacionar 1/2 com “a metade de” e 3/2 com “uma unidade e meia”. O sentido de operador pode ainda ser aprofundado recorrendo a situações baseadas em modelos discretos.

A adição e subtracção de números racionais não negativos representados sob a forma de fracção surgem, nesta sequência, de forma natural, preparando para o trabalho que se vai fazer a seguir. De facto, nas duas primeiras fracções, os alunos identificam as partes que faltam para completar uma unidade: $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ e $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$. Nos casos da representação $\frac{4}{3}$ e $\frac{3}{2}$ da tira, o professor incentiva os alunos a expressar o que observam de outra forma e, consequentemente, a trabalhar, informalmente, a adição de números racionais não negativos representados sob a forma de fracção e a representação de numerais mistos. Assim, a figura resultante é, no primeiro caso, uma unidade “mais um terço” e no segundo, uma unidade “mais metade”, ou seja, $1+\frac{1}{3}$ e $1+\frac{1}{2}$. Esta é uma boa ocasião para o professor incluir a representação de número racional sob a forma de numeral misto ($1\frac{1}{3}$ e $1\frac{1}{2}$) aproveitando para levar os alunos a identificar situações do quotidiano em que este tipo de representação surge. No seguimento da exploração anterior, o professor aborda a subtracção de números racionais não negativos representados sob a forma de fracção através da identificação das partes que faltam para completar as duas tiras. Intuitivamente, os alunos são capazes de expressar essas partes de distintas formas, reconhecendo que são equivalentes: $2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$ e $2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$. Neste sentido, o professor incentiva os alunos a encontrarem formas diferentes de representar 4/3, utilizando as operações adição e subtracção.

Indicações suplementares. O professor desafia os alunos a formular tarefas em que se pretende trabalhar o conceito de número racional no sentido parte-todo e a reconstrução da unidade a partir das suas partes. Propõe também a exploração de situações em que a reconstrução da unidade permita elaborar uma nova figura, não ficando somente por casos de modelos rectangulares ou que conduzam ao simples prolongamento da figura inicial. Neste caso, para o mesmo enunciado da tarefa, o professor apresenta, por exemplo, a seguinte figura:



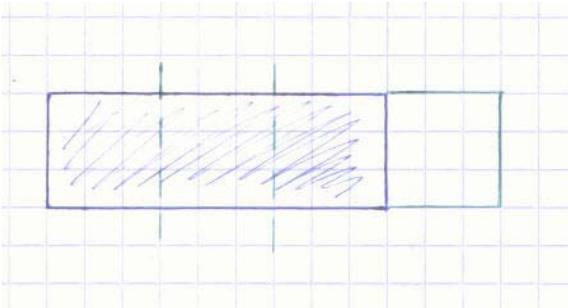
É fundamental analisar com os alunos diferentes figuras que sejam solução da situação apresentada.

Uma outra possibilidade de explorar a tarefa é estabelecer relações com aquilo que os alunos já sabem sobre percentagens. Por exemplo, nos casos das fracções que representam números menores do que a unidade, é interessante relacionar 1/2 com 50% e 3/4 com 75%.

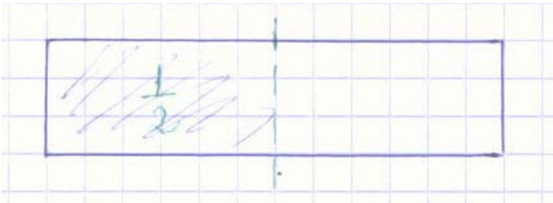
Situações como as apresentadas, por exemplo, nas cartas números 5, 6, 10, 14, 19, 20, 21 do jogo *Men-Tal* constituem boas oportunidades para consolidar o trabalho desenvolvido nesta tarefa.

Possíveis explorações dos alunos

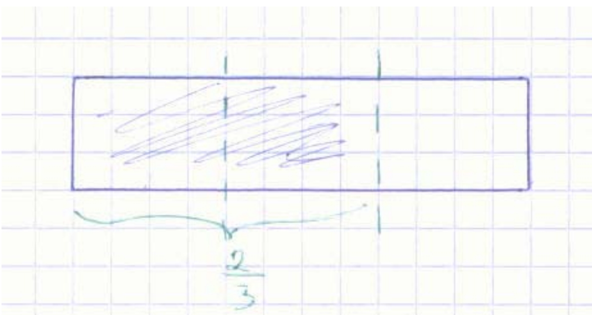
Na resolução desta tarefa os alunos começam por definir dois momentos fundamentais: (i) reconstruir a unidade; (ii) representar $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$ e $\frac{3}{2}$ dessa unidade. No primeiro, os alunos mobilizam os conhecimentos adquiridos numa situação que envolve a reversibilidade da relação parte-todo, isto é, os alunos percebem que se a figura representa 3/4 de uma tira, então a unidade foi dividida em 4 partes e apresentaram-se 3 dessas partes. Assim, para reconstruir a unidade, começam por dividir a figura em 3 partes geometricamente iguais, para identificar um quarto da unidade, e prolongar a figura dada.



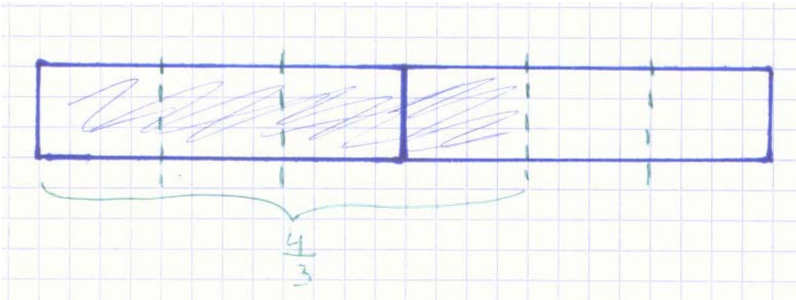
A partir do momento em que a unidade está reconstruída, os alunos representam as partes da tira pedidas. Para representar 1/2 da tira basta dividir a tira ao meio e considerar uma das partes:

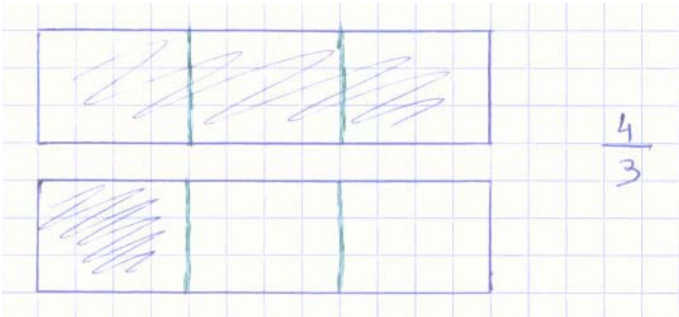


Para representar 2/3 da tira, os alunos dividem a tira em 3 partes geometricamente iguais e de seguida consideram duas dessas partes:

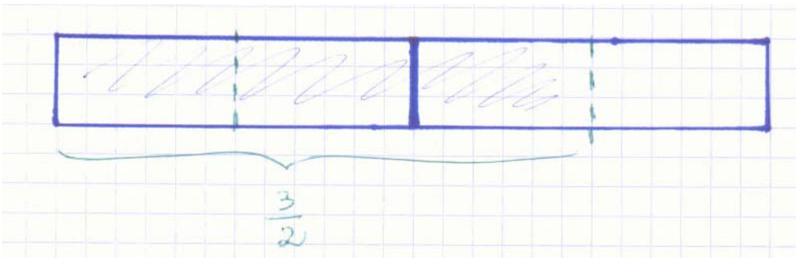


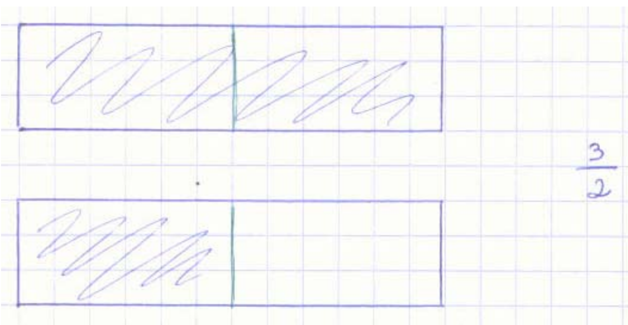
Na situação seguinte, os alunos identificam 4/3 como representando um número racional não negativo maior do que um: uma unidade mais uma terça parte dessa unidade, isto é, $1\frac{1}{3}$. Assim, os alunos representam uma tira mais uma parte da tira (1/3):





De modo análogo, os alunos consideram uma unidade mais metade da unidade para representar 3/2 da tira. Para tal, começam por dividir a tira ao meio para de seguida pintarem uma tira mais uma parte da tira, que resulta da divisão da tira em duas partes geometricamente iguais:





Investigando dízimas

Uma fracção unitária é aquela que tem numerador igual a 1. Os egípcios, um dos primeiros povos a usar fracções para representar números racionais, utilizavam fundamentalmente fracções unitárias.

Dada uma fracção, se dividires o numerador pelo denominador obténs uma *dízima*.

1. Que tipo de dízimas são geradas pelas fracções unitárias? Existe alguma relação entre o tipo de dízimas geradas e os denominadores das fracções?

   Investiga e formula conjecturas.

2. Investiga agora as fracções não unitárias. Acontece o mesmo?

Investigando dízimas

Conhecimentos prévios dos alunos

Com o trabalho desenvolvido no 1.º ciclo, os alunos devem:

- Compreender fracções com os significados quociente, parte-todo e operador;
- Ser capazes de:
  - Ler e escrever números na representação decimal (até à milésima) e relacionar diferentes representações dos números racionais não negativos;
  - Investigar regularidades numéricas.

Aprendizagens visadas

Com o seu trabalho nesta tarefa, os alunos devem:

- Compreender e usar um número racional como quociente;
- Ser capazes de:
  - Representar sob a forma de fracção um número racional não negativo dado por uma dízima finita;
  - Formular e testar conjecturas e generalizações e justificá-las fazendo deduções informais;
  - Exprimir ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito, usando a notação, simbologia e vocabulário próprios.

Orientações para a apresentação e exploração da tarefa

Indicações gerais. Esta investigação tem duas partes. A parte 1 é realizada em 90 minutos, sendo os primeiros 45 dedicados ao trabalho autónomo dos alunos e os restantes destinados à discussão e sistematização de resultados e conceitos. A parte 2 da tarefa (*Investiga agora as fracções não unitárias. Acontece o mesmo?*) – que pode ser realizada na sequência da primeira, durante 45 minutos – beneficia muito das conclusões tiradas na parte 1.

Na primeira parte do bloco de 90 minutos, os alunos trabalham aos pares ou em grupos de 3 ou 4 alunos, uma vez que há necessidade de realizar uma grande quantidade de cálculos. Na realização da tarefa é de usar calculadora para determinar algumas dízimas, de modo a que os alunos tenham tempo para investigar regularidades numéricas. Contudo, os alunos devem calcular mentalmente alguns quocientes que correspondem a valores de referência, como por exemplo: 1/2, 1/4, 1/5, 1/8, 1/10, 1/100.

Esta tarefa permite que os alunos trabalhem a fracção como quociente exacto entre dois números inteiros (na parte 1 da tarefa com fracções unitárias e na parte 2 com fracções não unitárias), expressando-a como dízima finita e infinita periódica. Os alunos reconhecem que só as dízimas finitas são representadas por fracções decimais e por numerais decimais. Deste modo, os alunos ampliam o sentido de número racional, ao mesmo tempo que investigam regularidades nos denominadores das fracções e formulam e testam conjecturas. Esta tarefa favorece, assim, o estabelecimento de conexões com a Álgebra.

Dada a natureza aberta da tarefa, o acompanhamento do professor revela-se de grande importância, principalmente na fase de arranque, evitando que os alunos se dispersem no seu trabalho. Logo nesta fase, o professor estimula a realização de registos claros e bem organizados sobre as regularidades encontradas, recorrendo a notação, simbologia e vocabulário que favoreçam a discussão posterior.

Exploração da tarefa. Uma vez que a tarefa introduz algumas ideias novas para os alunos, como as noções de fracção unitária e de dízima, o professor começa por explorá-las inicialmente. Esta fase do trabalho é realizada em grande grupo, discutindo-se e dando-se exemplos de fracções unitárias e não unitárias. Nesta altura, é oportuno fazer uma referência de natureza histórica à Matemática usada no antigo Egipto, nomeadamente à utilização de fracções unitárias na medição de terrenos – assim, o professor tem oportunidade de aludir também ao sentido da fracção como medida. Para além da noção de fracção unitária, é apresentado o conceito de dízima, explorando-se o sentido da fracção como quociente entre dois números inteiros não negativos (com o divisor diferente de zero). A partir de exemplos de algumas fracções unitárias, o professor apresenta a classificação das dízimas (finitas e infinitas periódicas). A determinação das dízimas é uma boa oportunidade para retomar alguns valores de referência (como 1/2 e 0,5; 1/4 e 0,25), o cálculo mental (calculando, por exemplo, 1/8 a partir de 1/4) e o algoritmo da divisão (por exemplo, na determinação da dízima correspondente a 1/11 e também para decidir se uma dízima é periódica ou não, quando o seu período tem mais algarismos do que aqueles que o visor da calculadora permite visualizar). No caso das dízimas infinitas periódicas, o professor introduz a noção de período da dízima e a forma de o representar.

Para determinar as fracções que geram dízimas finitas, o professor leva os alunos a formularem e testarem conjecturas, refutando-as ou aceitando-as. Nesta fase, é importante que os alunos relacionem os números que são denominadores de fracções que originam dízimas finitas com os divisores das potências de base 10. Neste caso, um caminho natural para os alunos é a escrita de fracções equivalentes de denominador que seja potência de base 10, explorando-se a divisão por 10, 100, 1000... e a escrita do correspondente numeral decimal. Essa pode ser uma forma de confirmar as dízimas calculadas anteriormente.

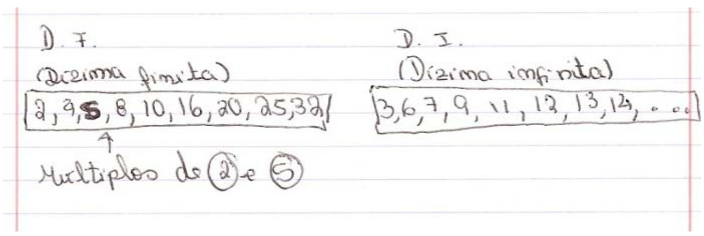
Após a investigação das fracções unitárias e depois de registadas e discutidas as conclusões da parte 1, o professor questiona os alunos se as suas conjecturas também serão válidas para as fracções não unitárias (ponto 2 da tarefa). Esta é uma boa ocasião para discutir como se obtém uma fracção não unitária a partir de outras unitárias e quais são as consequências que isso tem nas dízimas correspondentes.

Indicações suplementares. Esta tarefa pode ser completada com a exploração das dízimas infinitas periódicas, identificando-se regularidades nos quocientes originados pelas fracções. Uma possibilidade é o estudo dos períodos das dízimas geradas por fracções de denominador 11, dando os alunos conta que são múltiplos de 9. Embora nesta altura ainda não se tenha trabalhado a multiplicação de números racionais não negativos na forma de fracção, os alunos compreendem que sendo 1/11=0,(09) e 2/11 o mesmo que $2\times\frac{1}{11}$, então 2/11= 0,(18).

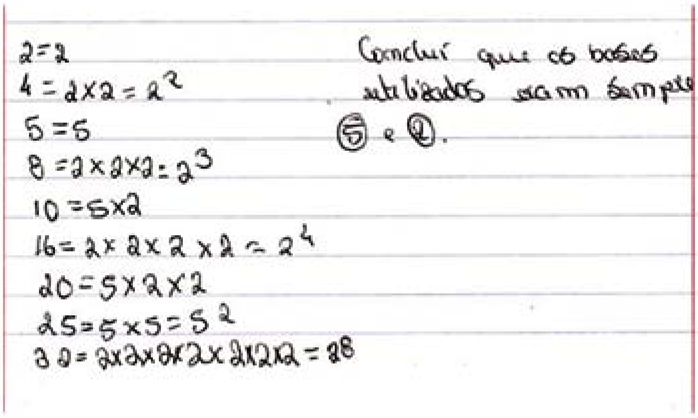
Possíveis explorações dos alunos

Os alunos começam por escrever as dízimas que correspondem às fracções unitárias 1/n, com n natural. Os alunos verificam que 1/2, 1/4, 1/5, 1/8, 1/10, 1/16, 1/20, 1/25, 1/32,... geram dízimas finitas, enquanto 1/3, 1/6, 1/7, ... geram dízimas infinitas periódicas (neste caso, os alunos compreendem que não é possível representar por numeral decimal).

Depois, o professor leva os alunos a concentrarem-se nos denominadores das fracções unitárias (ponto 1 da tarefa) que originam dízimas finitas:



No caso de os alunos não avançarem na formulação de conjecturas, o professor pode sugerir que decomponham os números que figuram nesses denominadores em produtos de factores primos. Assim, os alunos concluem que o denominador se pode decompor num produto de potências de bases 2 e 5:



$2=2$
$4=2\times2=2^2$
$5=5$
$8=2\times2\times2=2^3$
$10=5\times2$
$16=2\times2\times2\times2=2^4$
$20=5\times2\times2$
$25=5\times5=5^2$
$32=2\times2\times2\times2\times2\times2\times2=28$

Concluí que as bases utilizadas eram sempre 5 e 2.

As fracções unitárias que têm denominador 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 32, 40... dão dízimas finitas. As que têm o denominador 3, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14... dão dízimas infinitas. Quando fizemos a decomposição dos denominadores só utilizámos os números primos 2 e 5, nuns só um deles e noutros os dois. Nas fracções que não são unitárias também dão dízimas finitas e infinitas. (Relatório de grupo)

O passo seguinte é a escrita de fracções equivalentes às dadas com denominador que seja potência de base 10 (fracção decimal) e escrita da respectiva dízima finita (numeral decimal). Dessa forma, os alunos compreendem por que razão só algumas fracções geram dízimas finitas.

Ao ataque![3]

Hagar, o terrível, Chris Browne

1. Descreve a situação apresentada na tira. Que intenção terá tido o protagonista desta situação e que estratégia usou?
2. Quantos números tem o Chiripa que dizer antes de atacar? Que números foram usados? E que representações?
3. Como poderia reduzir o tempo de espera? E se, pelo contrário, quisesse atrasar ainda mais o ataque?
4. Imagina que o Chiripa chega a $9\frac{7}{8}$. A que estratégia pode recorrer para adiar ainda

[3] Tarefa inspirada em Flores, P. (2003). *Humor grafico en el aula de matemáticas*. Granada: Arial.

mais o início do ataque?

Ao ataque!

Conhecimentos prévios dos alunos

Com o trabalho desenvolvido no 1.º ciclo e no 5.º ano, os alunos devem:

- Compreender e usar um número racional como quociente, parte-todo e operador;
- Ser capazes de:
  - Comparar e ordenar números representados na forma decimal;
  - Localizar e posicionar números racionais não negativos na recta numérica.

Aprendizagens visadas

Com o seu trabalho nesta tarefa, os alunos devem ser capazes de:

- Comparar e ordenar números racionais representados de diferentes formas;
- Localizar e posicionar na recta numérica um número racional não negativo representado nas suas diferentes formas;
- Interpretar a informação e ideias matemáticas representadas de diversas formas;
- Explicar e justificar os processos, resultados e ideias matemáticos, recorrendo a exemplos e contra-exemplos.

Orientações para apresentação e exploração da tarefa

Indicações gerais. Esta tarefa é um problema que decorre de uma situação apresentada numa tira de *Hagar, o terrível*, de Chris Browne. O episódio retrata um grupo de Vikings que se prepara para responder a um ataque do inimigo, optando um deles (Chiripa) por fazer uma “contagem” invulgar e desconcertante face ao objectivo definido pelo outro companheiro. A comicidade da situação passa pela compreensão da estratégia usada, bem como da intenção que lhe está subjacente. A utilização de textos literários como suporte à realização de tarefas matemáticas (neste caso, de banda desenhada), para além de diversificar o contexto do problema favorece o estabelecimento de relações com outras disciplinas do currículo, como a Língua Portuguesa, potenciando as aprendizagens dos alunos.

Tendo em consideração o trabalho que se pretende desenvolver, esta tarefa pode ser realizada em 90 minutos, dos quais 30 são para a resolução em grupos de 3 ou 4 alunos e os restantes para discussão e sistematização de resultados e dos tópicos matemáticos (comparação e ordenação de números racionais não negativos).

Dada a natureza da tarefa, é útil o professor sugerir a elaboração de um relatório com a exploração dos quatro pontos.

Exploração da tarefa. Nesta tarefa, os alunos mobilizam diversas representações de números racionais não negativos. A situação faz referência a números racionais na forma de fracção e de numerais mistos, mas a resposta às questões dos pontos 3 e 4 pode fazer surgir a necessidade de também recorrer a numerais decimais. Para resolver o problema, há necessidade de posicionar números racionais na recta numérica e, eventualmente, de localizar outros na aproximação ao 10. Neste trabalho, os alunos têm oportunidade de comparar e ordenar números racionais não negativos, retomando o estudo iniciado no 1.º ciclo com esses números representados na forma decimal e utilizando agora, também, fracções e numerais mistos.

Na abordagem ao ponto 1, o professor incentiva os alunos a resumir os principais aspectos da situação e a procurar descobrir as intenções de Chiripa. Chris Browne procura com esta tira caricaturar, e tornar cómica, uma situação que exigia uma resposta rápida a um ataque inimigo. Na verdade, a amplitude do intervalo escolhido e a natureza dos números usados para atingir o momento de ataque tornam a situação cómica.

Para responder às questões do ponto 2 é importante o professor sugerir aos alunos o uso da recta numérica para posicionar os números, começando por marcar o 0 e o 10 e de seguida os números que são apresentados na tira, para averiguarem da sua proximidade ao 10 e quantos estão marcados entre dois números naturais consecutivos. Esta estratégia revela-se importante na resolução das questões seguintes. Nesta fase, é importante que os alunos reconheçam a equivalência de algumas representações (numeral misto, fracção e numeral decimal); por exemplo; 10/8; 1,25; $1\frac{2}{8}$, uma vez que podem recorrer a umas ou a outras.

No ponto 3, o professor desafia os alunos a pensar no que acontece se os incrementos da "contagem" forem inferiores ou superiores a 1/8. Em ambos os casos, os alunos devem ser capazes de relacionar o denominador da fracção com a *quantidade* de números que têm que ser ditos para iniciar a resposta ao ataque ($10 \times n$, sendo n o número natural que é denominador da fracção $\frac{1}{n}$). É igualmente importante discutir o que acontece quando as fracções não são unitárias e quando o incremento é um número racional não negativo maior que 1 representado por uma fracção (por exemplo, 5/2). Neste ponto 3, e no seguinte, é interessante fazer o estudo quando o incremento é um número racional não negativo na forma de numeral decimal (por exemplo, 0,1; 0,01; 0,001; 0,25;...).

No ponto 4 os alunos são confrontados com a necessidade de encontrar números racionais não negativos entre $9\frac{7}{8}$ e 10. O professor pode lançar algumas questões para orientar o trabalho dos alunos, tais como: Haverá números racionais entre $9\frac{7}{8}$ e 10? Quantos? Como encontrá-los?

Na discussão da tarefa é importante o professor explorar a comparação e a ordenação de números racionais não negativos na forma de fracção, sublinhando as relações entre os numeradores e os denominadores. Baseados nos resultados da tarefa, os alunos devem concluir que mantendo o mesmo denominador, a comparação dos números baseia-se na comparação dos numeradores. Do mesmo modo, os alunos devem concluir que tendo as fracções o mesmo numerador é maior a que tiver menor denominador (por exemplo, considerando incrementos de 1/8 e de 1/5, 3/5 representa um número maior que 3/8). Para além da comparação através do recurso à recta numérica, esta relação pode ser evidenciada através da determinação dos quocientes.

Para posicionar números fraccionários na recta numérica é essencial enquadrá-los entre dois números inteiros. Para isso, os alunos podem recorrer à divisão inteira e escrever o numeral misto ou obter a dízima. A localização é também um desafio importante a ser proposto aos alunos neste contexto. Para isso, o professor coloca na recta numérica pontos para os alunos localizarem.

O professor formula, ainda, algumas questões relativas à densidade do conjunto dos números racionais (entre quaisquer dois números racionais existe uma infinidade de números): Qual o número racional sucessor de, por exemplo, 4/5? Qual ou quais os números mais próximos dele? Quantos números estão entre 1,4 e 1,9? Porquê?

Indicações suplementares. A comparação e ordenação de números racionais pode ser concretizada em situações de jogo, levando os alunos a posicionar e localizar na recta numérica números racionais não negativos. As situações de medida são também um contexto adequado ao tratamento deste tópico, tanto mais que é necessário que os alunos façam uso de diferentes representações dos números.

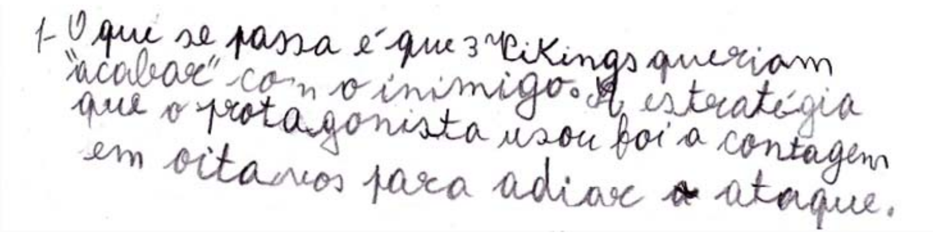
O professor pode propor a análise de situações análogas em que os limites e os incrementos sejam diferentes, promovendo o desenvolvimento do cálculo mental. Por exemplo, poderá formular questões como: Quantos números deverá dizer o Chiripa de 4 até 12 se os disser de 1/5 em 1/5? O Chiripa está a pensar em atacar o seu inimigo aos 20. Até lá disse 80 números. Que estratégia terá ele usado?

Como extensão da tarefa, e já que nesta se utilizou uma situação de banda desenhada, o professor desafia os alunos a procurar na literatura infanto-juvenil situações que estejam relacionadas com o estudo dos números racionais não negativos, podendo apresentar algumas sugestões de livros[4].

De forma a consolidar as aprendizagens dos alunos, podem ser exploradas situações como as apresentadas nas cartas 1 e 40 do jogo *Men-Tal*.

Possíveis explorações dos alunos

Na descrição da situação apresentada na tira, os alunos podem referir aspectos relacionados com a amplitude do intervalo que decide o ataque, os números escolhidos pelo Chiripa em ordem crescente até atingir o limite estabelecido e as consequências do tempo excessivo que daí resulta. Os alunos relacionam a intenção do protagonista com a escolha do intervalo pelo amigo do Chiripa, já demasiadamente grande, aliado à escolha de números racionais para a "contagem", com acréscimos excessivamente pequenos, e com a escolha de numerais mistos em vez de 8/8, 9/8, …, a partir da unidade. Os alunos referem que a selecção anterior, para além de pretender reforçar a lentidão da resposta, ajuda a conceber um cenário de comédia.


1- O que se passa é que 3 vikings queriam "acabar" com o inimigo. A estratégia que o protagonista usou foi a contagem em oitavos para adiar ~~o~~ ataque.

Na questão 2, os alunos apercebem-se de que cada unidade está dividida em 8 partes e que, portanto, para atingir as dez unidades até ao ataque, o Chiripa necessita de dizer 80 números. Na segunda parte dessa questão, os alunos referem que a sequência de números racionais não negativos que o Chiripa enuncia envolve fracções, numerais mistos e números inteiros.

Na questão 3, quando se trata de abreviar o momento da resposta ao ataque, a maioria dos alunos acha mais natural considerar 1, 2, 3,.... No entanto, aparecem também outras soluções: 1/2, 1, 3/2, 2, …, bastando, neste caso, indicar 20 números até atingir o momento de ataque. No caso contrário, surgem incrementos de 1/10 e 1/1000.

[4] Pina, M. (2003). *Pequeno livro de desmatemática*. Lisboa: Assírio & Alvim.
Tahan, M. (2001). *O homem que sabia contar*. Lisboa: Editorial Presença.

3- Contando em números inteiro 1,2,3,4,5,6,7,8,9 e 10. Mas para atrasar ainda mais pode aumentar o denominador.

Na questão 4, os alunos escrevem o numeral misto $9\frac{7}{8}$ sob a forma de fracção $\frac{79}{8}$ tal como o número 10 ou $\frac{80}{8}$. Depois de os posicionar na recta numérica, decidem dividir o espaço entre eles em 10 partes e começam a escrever $\frac{790}{80}$, $\frac{791}{80}$,... Alguns alunos decidem escrever o numeral decimal correspondente a $\frac{79}{8}$ (9,875) e depois 9,876; 9,877,...

Quem tem razão?[5]

Ricardo e Sofia são alunos do 5.º ano da Escola do Monte Verde. Ontem à tarde estavam muito entusiasmados a conversar:

Ricardo – Sabes o que descobri? O $\frac{2}{3}$ está entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$, uma vez que o numerador 2 está entre 1 e 3 e o denominador 3 está entre 2 e 4. É fantástico! Se calhar funciona sempre, não achas?

Sofia ficou espantada com a descoberta do amigo. Depois, pegou numa folha e começou a escrever fracções. Nisto, disse ela:

Sofia – Olha que não sei se será sempre assim.

Investiga quem tem razão.

Elabora o relatório da tarefa.

[5] Inspirada na tarefa "Ordering Fractions" (http://intermath.coe.uga.edu/topics/nmcncept/fractns/a06.htm, em 09.04.08)

Quem tem razão?

Conhecimentos prévios dos alunos

Com o trabalho desenvolvido no 1.º ciclo e no 5.º ano, os alunos devem:

- Compreender e usar um número racional com o significado quociente;
- Ser capazes de:
  - Localizar e posicionar na recta numérica um número racional não negativo representado nas suas diferentes formas;
  - Expressar ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito, utilizando linguagem e vocabulário próprios.

Aprendizagens visadas

Com o seu trabalho nesta tarefa, os alunos devem ser capazes de:

- Comparar e ordenar números racionais representados de diferentes formas;
- Resolver problemas que envolvam números racionais não negativos;
- Formular e testar conjecturas e generalizações e justificá-las fazendo deduções informais;
- Discutir resultados, processos e ideias matemáticos.

Orientações para apresentação e exploração da tarefa

Indicações gerais. Partindo da exploração de uma conjectura informal, esta tarefa de investigação permite que os alunos comparem e ordenem números racionais não negativos, escritos na forma de fracção, conhecendo a ordenação dos respectivos numeradores e denominadores. A tarefa favorece igualmente o desenvolvimento da capacidade de abstracção e a elaboração de argumentações matemáticas.

A realização desta tarefa está prevista para 90 minutos. Na primeira parte, com a duração de cerca de 45 minutos, os alunos resolvem a tarefa e na segunda parte apresentam e discutem as principais conclusões. Assim, dada a natureza da tarefa e a necessidade de promover a troca de ideias, propõe-se a organização dos alunos em grupos de 3 ou 4 elementos.

Exploração da tarefa. No desenvolvimento da tarefa, os alunos começam por verificar se a conjectura do Ricardo é válida para os números indicados. Nesse sentido, é fundamental que tenham compreendido correctamente o enunciado, as relações que se pretendem estabelecer entre as fracções e os respectivos termos, e que encontrem representações matemáticas adequadas à resolução da tarefa. Previamente e sem formalizar, o professor explora a relação de ordem - *menor que* - bem como a forma de a representar. Por exemplo, escrever $5 < 6$ e $6 < 9$ é equivalente a escrever $5 < 6 < 9$. Depois de traduzirem o enunciado em linguagem matemática, os alunos comparam as fracções resultantes. Esse é, de resto, um procedimento ao qual recorrem diversas vezes na realização da tarefa. Para tal, os alunos podem determinar fracções equivalentes – de modo a obter conjuntos de fracções com o mesmo numerador ou o mesmo denominador (neste caso, os alunos procuram, preferencialmente, o mínimo múltiplo comum) – ou localizar os números racionais não negativos na recta numérica.

Para a análise da veracidade da conjectura para quaisquer números inteiros positivos, é possível que os alunos apenas escolham números que a tornem verdadeira, implicando que possam concluir que a Sofia não tem razão. Isto porque será natural que se considerem exemplos em que os números são consecutivos, como os analisados por Ricardo. O professor desafia os alunos a procurar um exemplo que não verifique a conjectura do Ricardo. Desse modo, sugere que estudem diferentes números inteiros positivos (podendo incluir o zero no numerador) suficientemente afastados. Se mesmo assim os alunos não conseguirem encontrar casos em que a conjectura do Ricardo não se verifica, o professor propõe, por exemplo, que analisem a situação com os números 2, 10, 60 e 200. Nesse caso, $\frac{2}{10} > \frac{10}{60}$ e $\frac{10}{60} < \frac{60}{200}$ e, portanto, a Sofia tem razão.

Da discussão da tarefa, apoiando-se nos relatórios elaborados, o professor, com o apoio dos alunos, sistematiza os aspectos relativos à comparação e ordenação de números racionais representados por fracções com numeradores e denominadores diferentes. O professor aproveita também para salientar a importância da conjectura na actividade matemática e no papel que os contra-exemplos têm na sua refutação.

Indicações suplementares. O professor explora a mesma situação com 5 e 6 números inteiros positivos distintos. No caso de os alunos se encontrarem numa situação de impasse, o professor sugere um contra-exemplo, socorrendo-se do caso geral:

Para quaisquer a, b, c, d, e *e* f *inteiros (* $d \neq 0,\ e \neq 0,\ f \neq 0$*), onde* $a < b < c$ e $d < e < f$ *,*
para que se verifique $\frac{a}{d} < \frac{b}{e} < \frac{c}{f}$ *é necessário que* $a < \frac{bd}{e}$ e $b < \frac{ce}{f}$*.*

É igualmente interessante o professor explorar a mesma situação apresentando o enunciado com valores consecutivos e não consecutivos, com vista a verificar se a natureza dos números do enunciado tem influência na investigação dos alunos.

Se o objectivo do professor com esta tarefa não for a comparação das fracções a partir da relação entre os seus termos, mas sobretudo o teste da conjectura, pode promover o uso da calculadora, permitindo assim que os alunos trabalhem com mais casos. Se se optar por esta abordagem, é oportuno analisar as dízimas resultantes, estabelecendo-se relações entre as diferentes representações de um número racional não negativo.

As cartas 11 e 44 do jogo *Men-Tal*, incluem possíveis situações a explorar com o intuito de consolidar as aprendizagens dos alunos neste tópico.

Possíveis explorações dos alunos

Nesta investigação, os alunos exploram diversos casos com o objectivo de averiguarem se a conjectura é válida. Começam por analisar números consecutivos, como os sugeridos pelo Ricardo, e concluem que ele tem razão. Para a comparação das fracções, os alunos recorrem às fracções equivalentes e às dízimas:

$2 < 3 < 4 \qquad 3 < 4 < 5$

$\frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{5}$

Vamos agora tornar os denominadores iguais

Múltiplos de 3 – 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, ...

Múltiplos de 4 – 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, ...

Múltiplos de 5 – 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, ...

$\times 20 \; \frac{2}{3} \qquad \times 15 \; \frac{3}{4} \qquad \times 12 \; \frac{4}{5}$

$\frac{40}{60} < \frac{45}{60} < \frac{48}{60}$

porque como têm o mesmo denominador, é maior a que tem maior numerador.

Sim, verifica-se sempre.

Ex:

$\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$ → 2 está entre 1 e 3
→ 3 está entre 2 e 4

$\frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{5}{6}$ → 4 está entre 3 e 5
→ 5 está entre 4 e 6

$\frac{5}{6} < \frac{6}{7} < \frac{7}{8}$ → 6 está entre 5 e 7
→ 7 está entre 6 e 8

...

$\frac{1}{2} = 0,5$ | $\frac{2}{3} = 0,6666...$ | $\frac{3}{4} = 0,75$ → 0,666... está entre 0,5 e 0,75

$\frac{3}{4} = 0,75$ | $\frac{4}{5} = 0,8$ | $\frac{5}{6} = 0,83333...$ → 0,8 está entre 0,75 e 0,8333...

$\frac{5}{6} = 0,83333...$ | $\frac{6}{7} = 0,8571428$ | $\frac{7}{8} = 0,875$ → 0,8571428 está entre 0,83333... e 0,875.

Conforme é sugerido nas indicações suplementares, alguns alunos estudam esta situação para 5 e 6 números inteiros positivos diferentes:

$\frac{1}{7}$ $\frac{2}{8}$ $\frac{3}{9}$

$\frac{1}{7} = 0,14...$

$\frac{2}{8} = 0,25$

$\frac{3}{9} = 0,3(3)$

0,14 0,25 0,3

está entre

Nas resoluções seguintes, os alunos concluem que a conjectura do Ricardo não se verifica sempre:

$\frac{1}{5}$ $\frac{4}{10}$ $\frac{5}{20}$ → Neste caso o $\frac{4}{10}$ não está entre o $\frac{1}{5}$ e o $\frac{5}{20}$, porque os denominadores e os numeradores tinham de ser mais seguidos, como por exemplo $\frac{1}{7} < \frac{2}{8} < \frac{3}{9}$. E assim o $\frac{2}{8}$ já está entre o $\frac{1}{7}$ e o $\frac{3}{9}$.

0,2 0,4 0,25

$$\frac{7}{2} \quad \frac{8}{3} \quad \frac{9}{4}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$3{,}5 \quad 2{,}6 \quad 2{,}25$$

R: Nem em todos os casos se verifica isso. Como esta representada.

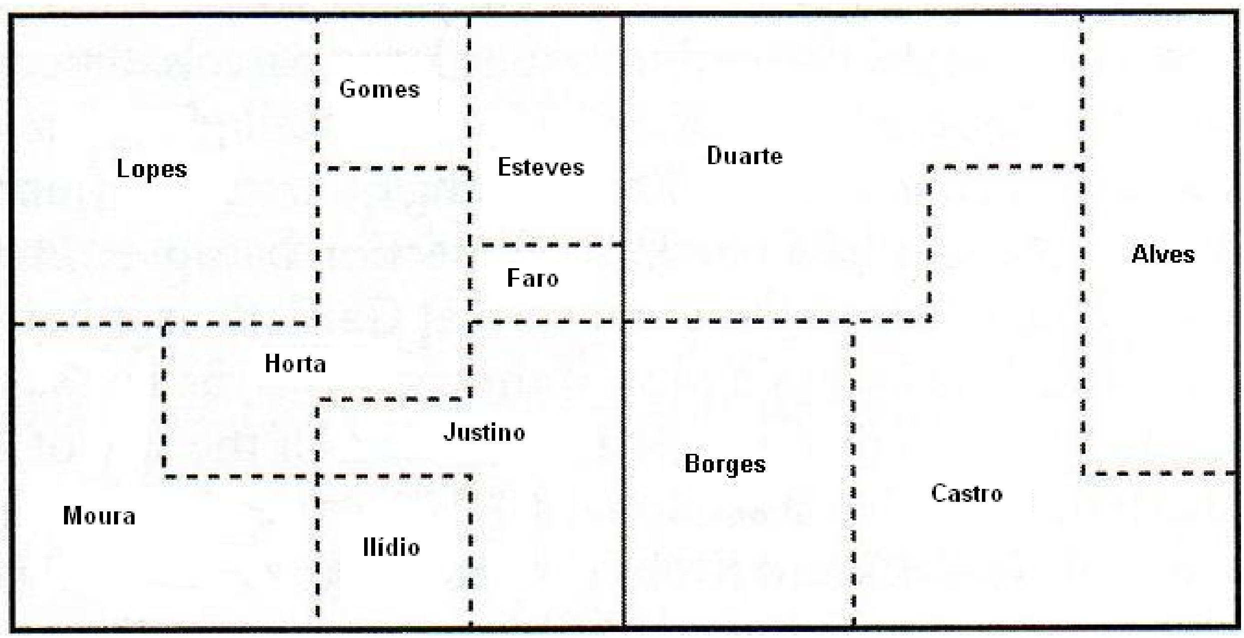
Na última resolução, ao contrário do que acontece no exemplo do Ricardo, as fracções escolhidas são superiores à unidade.

Terrenos nas aldeias[6]

Parte 1 – Aldeia Amarela e Aldeia Branca

Em duas aldeias vizinhas, algumas das famílias possuem terrenos de cultivo que estão distribuídos conforme mostra a figura seguinte:

Aldeia Amarela ***Aldeia Branca***



Cada aldeia tem a forma de um quadrado com 1 km de lado.

1. Que fracção dos terrenos de cultivo da respectiva aldeia possui cada um dos proprietários? Explica o teu raciocínio.

[6] Adaptado de Lappan, G. & Bouck M. (1998). Developing algorithms for adding and subtracting fractions. In L. J. Morrow & M. J. Kenney (Eds.) *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (pp. 183-197). Reston VA: NCTM.

Parte 2 – Compras e vendas

Algumas famílias venderam os seus terrenos a outros proprietários. Depois de concluídas as vendas, a distribuição das terras passou a ser a seguinte:

- Apenas 4 proprietários – as famílias Alves, Ilídio, Esteves e Moura – detêm todos os terrenos das duas aldeias;
- A família Alves comprou terrenos a uma única família e tem agora o equivalente a $\frac{1}{2}$ de uma aldeia;
- A família Ilídio comprou terrenos a três famílias e agora detém o equivalente a $\frac{13}{32}$ de uma aldeia;
- A família Moura tem agora o equivalente $\frac{1}{2}$ de uma aldeia;
- A família Esteves tem os terrenos restantes das duas aldeias;
- Cada uma das quatro famílias que detêm a totalidade dos terrenos pode deslocar-se ao longo do limite da sua propriedade sem ter que atravessar terrenos vizinhos.

1. Que transacções foram feitas entre as várias famílias que detinham inicialmente a propriedade dos terrenos das duas aldeias? Explica o teu raciocínio.

2. Desenha o mapa com os novos limites das propriedades das famílias Alves, Ilídio, Esteves e Moura. Em cada parcela de terreno escreve uma expressão com fracções que evidencie as transacções realizadas.

Parte 3 – Em busca do algoritmo

Quando precisamos de adicionar ou subtrair é necessário dispor de um conjunto de procedimentos que conduzam rapidamente ao resultado pretendido. Esse conjunto de procedimentos chama-se algoritmo.

Um algoritmo só é útil se descrever claramente e de forma compreensível os passos a seguir e se conduzir sempre ao resultado correcto.

1. A partir das situações exploradas nas Partes 1 e 2, descreve um algoritmo para adicionar fracções (o teu grupo pode apresentar mais do que um algoritmo). Regista o algoritmo de forma clara, tal como se fosses enviá-lo a alguém com quem não tivesses

oportunidade de conversar e que, por isso, lendo a tua mensagem deveria compreender perfeitamente as tuas instruções.

2. Cria agora um algoritmo para subtrair fracções (o teu grupo pode apresentar mais do que um algoritmo). Regista o algoritmo de forma clara, tal como se fosses enviá-lo a alguém com quem não tivesses oportunidade de conversar e que, por isso, lendo a tua mensagem deveria compreender perfeitamente as tuas instruções.

3. Experimenta os teus algoritmos e verifica se funcionam, ou não, nos casos que se seguem:

$\frac{5}{8}+\frac{7}{8}$ $\qquad$ $\frac{3}{4}-\frac{1}{8}$ $\qquad$ $\frac{5}{6}-\frac{1}{4}$ $\qquad$ $\frac{3}{5}+\frac{5}{3}$

Terrenos nas aldeias

Conhecimentos prévios dos alunos

Com o trabalho desenvolvido no 1.º ciclo e no 5.º ano, os alunos devem:

- Compreender e usar um número racional com o significado quociente, parte-todo e operador;
- Ser capazes de:
    - Reconstruir a unidade a partir das suas partes;
    - Identificar e dar exemplos de fracções equivalentes a uma dada fracção e escrever uma fracção na sua forma irredutível.

Aprendizagens visadas

Com o seu trabalho nesta tarefa, os alunos devem ser capazes de:

- Adicionar e subtrair números racionais não negativos representados sob a forma de fracção;
- Resolver problemas que envolvam números racionais não negativos;
- Conceber e pôr em prática estratégias de resolução de problemas, verificando a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados;
- Exprimir ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito, usando a notação, simbologia e vocabulário próprios.

Orientações para apresentação e exploração da tarefa

Indicações gerais. Nesta tarefa de investigação parte-se de um contexto do quotidiano, envolvendo a grandeza área, numa situação de compra e venda de terrenos, para que os alunos construam algoritmos da adição e subtracção de números racionais não negativos representados na forma de fracção. Este estudo vem na sequência daquele que foi realizado no 1.º ciclo com os algoritmos da adição e subtracção de números racionais na forma decimal.

A tarefa, dividida em três partes, pode ser realizada em pares ou em pequenos grupos – dada a extensão do enunciado é conveniente distribuir separadamente cada uma das partes da tarefa aos alunos. Para a sua realização prevê-se a necessidade de dois blocos, destinados à resolução, à discussão do trabalho realizado, ao registo das conclusões e à sistematização e uso dos algoritmos.

Exploração da tarefa. Na primeira parte da tarefa, para responderem à primeira questão, os alunos precisam de encontrar uma estratégia que lhes permita escrever uma fracção que represente a porção de terreno que detém cada um dos proprietários – neste caso, a fracção é utilizada no sentido parte-todo. Para tal, é importante que os alunos consigam imaginar as duas secções dos terrenos "cobertas" por uma malha quadriculada que permita uma divisão em partes iguais, considerando, no entanto, as duas secções em separado. Após a realização da primeira parte da tarefa, é necessário haver um primeiro momento de discussão na turma, durante o qual os diferentes grupos apresentam e analisam os resultados obtidos, exprimindo-os oralmente, com o apoio da escrita, recorrendo a notação e vocabulário próprios das fracções.

Na segunda parte da tarefa, em resultado das compras e vendas de terrenos, os alunos têm necessidade de reorganizar parcelas de terreno e, consequentemente, adicionarem números racionais não negativos representados pelas fracções encontradas na Parte 1. Em certas situações, os alunos questionam-se sobre "quanto falta" juntar para obter o resultado pretendido. Durante a exploração desta parte da tarefa é fundamental que os alunos tenham já alguma destreza em escrever fracções equivalentes e que compreendam o seu significado.

Fornecer a cada grupo, numa folha à parte, o mapa que se encontra no enunciado da tarefa e duas transparências (acetatos) facilita a resposta às duas primeiras questões da segunda parte da tarefa. A discussão desta segunda parte é feita imediatamente após a sua realização, sendo importante que se evidenciem as estratégias de resolução, os resultados obtidos e os processos utilizados.

Finalmente, na terceira parte da tarefa, cada grupo, tendo por base o trabalho realizado anteriormente, propõe um ou mais algoritmos para a adição e para a subtracção de números racionais representados na forma fraccionária e testa cada um deles, antes de o expor à turma. Esta parte da tarefa permite discutir a noção de algoritmo e a necessidade de o mesmo ser claro e eficaz, permitindo atingir, sem erros, o resultado pretendido. Para além da formulação e teste de conjecturas, a comunicação matemática, tanto a oral como a escrita, assume um papel fundamental nesta fase do trabalho dos alunos.

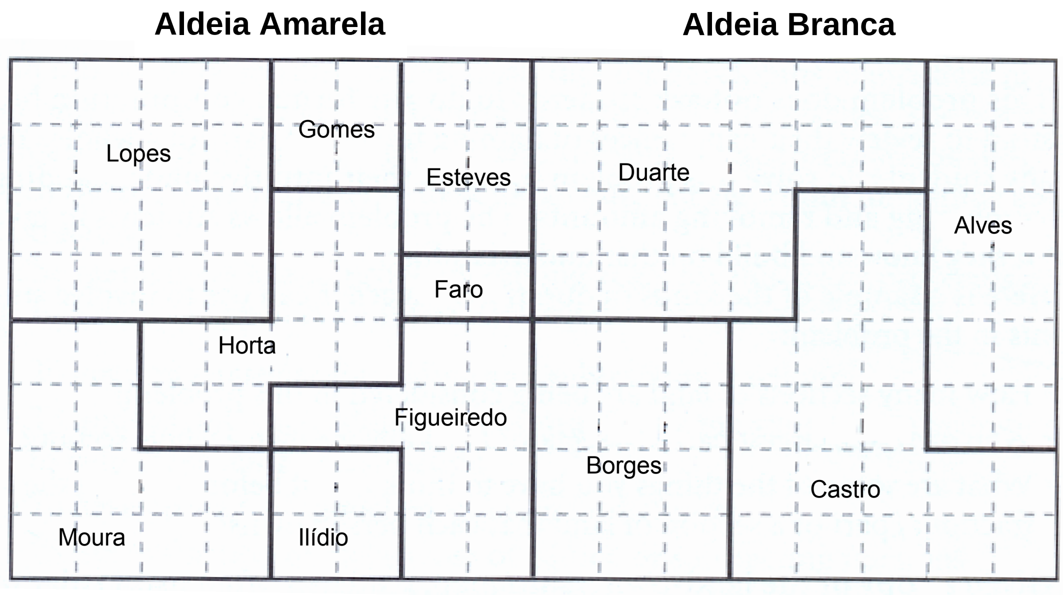
Indicações suplementares. Nas partes 1 e 2 da tarefa podem ser explorados também aspectos relativos às medidas das áreas dos terrenos, colocando aos alunos a seguinte questão: Quantos hectares de terreno possui cada uma das famílias?

O trabalho realizado nesta tarefa, em torno da construção dos algoritmos, pode ser partilhado com outras turmas, levando os alunos a comunicar por escrito as suas conclusões. Dessa forma, estimula-se a capacidade de os alunos exprimirem por escrito as suas ideias e processos matemáticos, usando para isso a notação, simbologia e vocabulário das fracções.

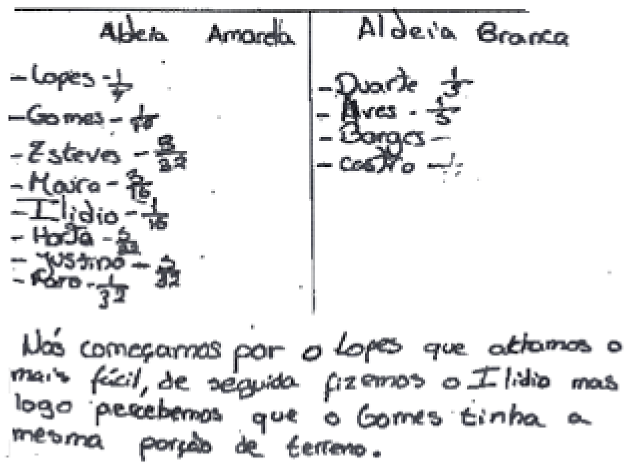
A destreza dos alunos na adição e subtracção de números racionais na forma de fracção é importante, mas não se esgota nesta tarefa. Este trabalho é retomado nas tarefas seguintes (por exemplo, *Quadrados sombreados… até ao infinito* e *Triângulo harmónico*) e pode resultar também da exploração de algumas cartas do jogo *Men-Tal* (n.º 32 e n.º 37).

Possíveis explorações dos alunos

Para responder à primeira questão da Parte 1, os alunos podem servir-se de uma régua e efectuar divisões no mapa, de modo a criar partes iguais em ambas as aldeias, conforme se ilustra na figura seguinte:



Num primeiro momento, os alunos, provavelmente, começam por prolongar as linhas que limitam cada parcela de terreno até ao limite exterior das duas aldeias e só depois acrescentam as linhas necessárias para obterem divisões em partes iguais. Uma vez realizado este trabalho, os alunos encontram facilmente a fracção que corresponde a cada parcela de terreno. Ao escreverem as fracções, os alunos podem seguir diferentes estratégias. Por exemplo, para o caso da família Lopes, o seu terreno, situado na Aldeia Amarela, pode ser representado pela fracção $\frac{16}{64}$; no entanto, os alunos também podem considerar aquela Aldeia dividida em quatro partes iguais, sendo uma delas ocupada pela propriedade da família Lopes, pelo que a fracção escolhida pelos alunos para representar aquele terreno pode ser $\frac{1}{4}$:

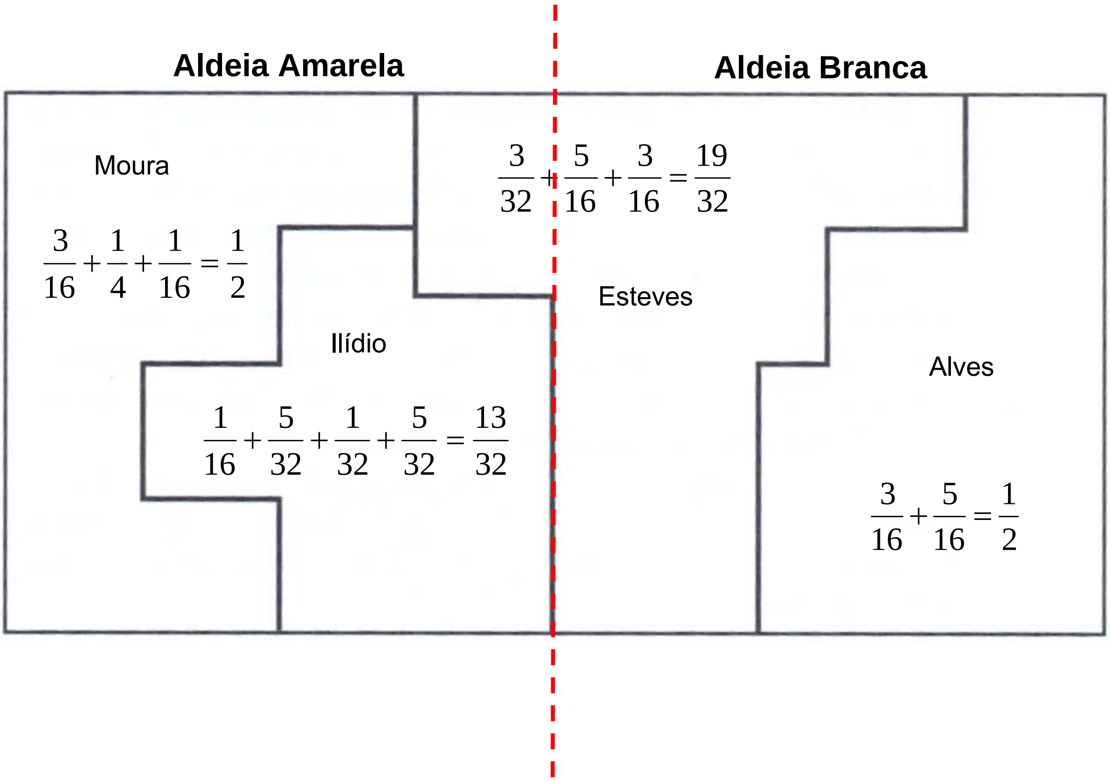


A família Moura tem uma parcela de terreno que também pode ser vista como $\frac{1}{4}$ da Aldeia Amarela, mas à qual foi retirada uma quarta parte (da própria parcela de terreno), ou seja, a fracção pode ser obtida como $\frac{1}{4}-\frac{1}{16}$ (sendo $\frac{1}{16}$ correspondente a $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{4}$). Já a família Ilídio tem um terreno que corresponde precisamente ao "pedaço" antes retirado ao terreno dos Moura, isto é, $\frac{1}{16}$. A família Gomes tem uma porção de terreno equivalente à dos Ilídio. Já a família Faro detém uma parcela de terreno que é metade da das famílias Ilídio e Gomes, ou seja, corresponde a $\frac{1}{32}$ da Aldeia Amarela. O terreno da família Esteves é equivalente a juntar as parcelas que pertencem, por exemplo, aos Gomes e aos Faro, ou seja, $\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{3}{32}$. Este tipo de raciocínio, que consiste em verificar equivalências entre terrenos, juntar ou retirar, deve ser incentivado junto de cada grupo.

Também é possível que alguns dos grupos tentem encontrar a fracção representativa de cada terreno tomando como referência a propriedade da família Faro. Por exemplo, os Horta têm o equivalente a cinco terrenos dos Faro. Assim, se o terreno dos Faro é representado por $\frac{1}{32}$, então o dos Horta poderá representar-se por $\frac{5}{32}$ da Aldeia Amarela.

Ao estabelecerem relações entre as representações das várias parcelas de terrenos, os alunos são levados, de forma intuitiva, a alterarem os denominadores das fracções, de modo a poderem juntá-las ou retirá-las.

Na Parte 2, os alunos têm que considerar, em simultâneo, um conjunto de condições. Por exemplo, se os alunos considerarem apenas a condição *Alves*



comprou terras a uma única pessoa e tem agora o equivalente a $\frac{1}{2}$ *de uma aldeia*, então a transacção poderia ter sido efectuada quer com a família Duarte quer com a família Castro. A decisão depende das outras condições apresentadas no problema. A realização desta tarefa em pequenos grupos reduz a probabilidade de os alunos esquecerem algumas das condições:

Nós começamos por a família Alves, então tivemos dificuldades. De seguida fizemos a família Moura também não tivemos dificuldades. Na família Ilídio tivemos que fazer várias divisões mas quando acabo verificamos que o Esteves tinha que estar próximo da família Duarte, então a família Alves comprou o terreno da família Castro.

Depois de realizadas todas as transacções, os alunos chegam a uma solução semelhante à seguinte:

Deste modo,

* A família Alves adquiriu os terrenos da família Castro:

$\left(\frac{3}{16}+\frac{5}{16}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}\right);$

* A família Ilídio comprou terrenos às famílias Horta, Faro e Figueiredo:

$\left(\frac{2}{32}+\frac{5}{32}+\frac{1}{32}+\frac{5}{32}=\frac{13}{32}\right);$

* A família Moura comprou os terrenos das famílias Lopes e Gomes:

$\left(\frac{3}{16}+\frac{4}{16}+\frac{1}{16}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}\right);$

* A família Esteves adquiriu os terrenos das famílias Duarte e Borges:

$\left(\frac{3}{32}+\frac{10}{32}+\frac{6}{32}=\frac{19}{32}\right).$

Ao realizar a discussão desta parte da tarefa é muito importante que o professor formule questões como:

- Como foram obtidas as fracções que estão a utilizar para representar as transacções?
- Como sabem que 12/64 é o mesmo que 3/16 e que 20/64 é o mesmo que 5/16?
- Como sabem que 3/16 com 5/16 dá 8/16?
- Por que é que para indicarem as adições escolheram fracções apenas com denominadores iguais?
- O que é que os outros grupos pensam da estratégia seguida por este grupo?
- O que representa cada uma das fracções dos terrenos que detém cada uma das quatro famílias?
- A família Alves detém metade dos terrenos existentes nas duas aldeias?
- Relativamente às duas aldeias, os terrenos da família Alves que parte são?

Na terceira fase da tarefa, os alunos reflectem sobre o trabalho desenvolvido nas etapas anteriores e descrevem os seus próprios algoritmos para adicionar e para subtrair números racionais representados sob a forma de fracção. Este é um momento durante o qual professor e alunos podem discutir o significado e a importância dos algoritmos em Matemática, sublinhando a necessidade da sua clareza e da sua eficácia. Por vezes, os alunos ficam-se pela conjectura de algoritmos para a adição de fracções como mesmo denominador:

Quando os denominadores são iguais adicio-
namos os numeradores, e os denominadores
continuam iguais.

Glenda Lappan e Mary Bouck referem que um elevado número de alunos produz enunciados em que conjecturam algoritmos bastante próximos do tradicional. A título de exemplo, seguem-se dois algoritmos criados por alunos que contemplam a adição de números racionais na forma de fracções com denominadores diferentes:

Caros amigos:

Quando estão à procura da soma ou da diferença de duas fracções, o que fazem? Eis o que eu faço. Se os denominadores não forem iguais, têm que os tornar iguais. O caminho mais simples para o fazerem é pensarem em números que tenham os denominadores como divisores. Se, por exemplo, um dos denominadores for 8 e o outro for 5, o número que interessa é o 40, porque é múltiplo de 8 e de 5. Então, multiplicam o 8 por 5 e o 5 por 8 e dá 40. A seguir também é necessário mudar os numeradores. Se o primeiro numerador for 4 e o segundo for 2, têm que os multiplicar pelo mesmo número que multiplicaram o denominador. $4 \times 5 = 20$ *e* $2 \times 8 = 16$*. Depois é só pegar nessas fracções para encontrar a soma ou a diferença:*

$$\frac{20}{40} + \frac{16}{40} = \frac{36}{40} \qquad \frac{20}{40} - \frac{16}{40} = \frac{4}{40}$$

Jay

Caro Jamie:

A minha estratégia para encontrar a soma de duas fracções é mudar para fracções que tenham o mesmo denominador e depois adicionar ou subtrair.

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{6} = \frac{7}{6} \textit{ ou } 1\frac{1}{6} \qquad \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{7}{6} \textit{ ou } 1\frac{1}{6}$$

Missy

Triângulo harmónico

A figura seguinte representa o *triângulo harmónico*. Observa as suas primeiras cinco linhas:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \frac{1}{1} & & & & \\
 & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & \\
 & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & \\
 & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & \\
\frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5}
\end{array}
$$

...

1. Recorrendo às operações com números racionais na forma de fracção, escreve as duas linhas seguintes do triângulo e explica como as obténs.
2. Investiga outras regularidades no *triângulo harmónico*.

Triângulo harmónico

Conhecimentos prévios dos alunos

Com o trabalho já desenvolvido no 1.º ciclo e no 5.º ano, os alunos devem:

- Compreender as propriedades e regras das operações e usá-las no cálculo;
- Ser capazes de:
  - Comparar e ordenar números racionais;
  - Investigar regularidades numéricas;
  - Escrever uma fracção na sua forma irredutível.

Aprendizagens visadas

Com o seu trabalho nesta tarefa, os alunos devem ser capazes de:

- Adicionar e subtrair números racionais não negativos representados sob a forma de fracção;
- Resolver problemas que envolvam números racionais não negativos;
- Identificar e dar exemplos de sequências e regularidades numéricas;
- Formular e testar conjecturas;
- Representar informação e ideias matemáticas de diversas formas.

Orientações para apresentação e exploração da tarefa

Indicações gerais. Esta tarefa, uma investigação com regularidades numéricas, permite que os alunos aprofundem o seu conhecimento dos números racionais não negativos e das operações adição e subtracção. Ao mesmo tempo, permite que os alunos desenvolvam o seu pensamento algébrico, identificando relações entre os números, formulando e testando conjecturas.

A tarefa é realizada durante 90 minutos, sendo os primeiros 45 dedicados ao trabalho autónomo dos alunos e os restantes destinados à discussão e sistematização de resultados e conceitos. Durante a primeira parte da aula, e em virtude da natureza da tarefa, os alunos trabalham aos pares ou em grupos de 3 ou 4 elementos, realizando com mais rapidez os cálculos, dividindo tarefas e discutindo, entre si, as estratégias de abordagem à investigação e os resultados obtidos. Na primeira fase da realização da tarefa, o professor está atento ao trabalho dos alunos, colocando questões ou dando pistas para que eles consigam avançar. Em especial, o professor deve verificar se os alunos começam por recorrer às operações com números racionais não negativos na forma de fracção para dar resposta à tarefa.

Nesta tarefa, a realização de bons registos pelos alunos, nomeadamente de conjecturas, é um aspecto a ter em conta pelo professor, pois disso depende, em grande medida, a qualidade da discussão e da aprendizagem. Para isso, os alunos recorrem a terminologia e a simbologia matemáticas sobre fracções para representar a informação e as suas ideias matemáticas.

Exploração da tarefa. Com a exploração desta tarefa pretende-se consolidar e alargar os conhecimentos dos alunos sobre a adição e a subtracção de números racionais não negativos representados sob a forma de fracção (regras operatórias, extensão das propriedades das operações estudadas no conjunto dos números naturais e a identidade fundamental da subtracção), num contexto de uma investigação de regularidades numéricas do triângulo harmónico. Este trabalho com os números e as operações é o meio através do qual os alunos investigam regularidades numéricas, conjecturando, discutindo e testando relações entre os números do triângulo.

Na abordagem ao ponto 1 da tarefa – *Recorrendo às operações com números racionais na forma de fracção, escreve as duas próximas linhas do triângulo e explica como as obténs* – os alunos estabelecem relações entre os números racionais não negativos representados pelas fracções, conjecturando que: (i) cada fracção corresponde à soma das duas fracções que ficam por baixo (por exemplo, $\frac{1}{1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$); (ii) as fracções que formam os "lados" do triângulo harmónico a partir de 1/1 são iguais em cada linha e têm o denominador igual ao número dessa linha. Para escrever a linha seguinte do triângulo harmónico é necessário escrever as fracções que ficam nos extremos, e que é 1/6, e depois completar a linha utilizando a operação inversa da adição (segundo número da linha 6: $\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$). Um aspecto que é importante sublinhar na exploração desta tarefa é a identificação e a compreensão, por parte dos alunos, da simetria existente no triângulo. Assim, para além de traçar o eixo de simetria, é fundamental explorar o porquê da existência dessa simetria e usá-la no preenchimento de cada linha. Essa é uma oportunidade para estudar a propriedade comutativa e depois também as demais propriedades da adição de números racionais não negativos.

Na exploração da segunda questão, os alunos devem procurar formular e testar outras conjecturas. A fim de estimular a discussão nos grupos, o professor coloca questões do tipo: O que acontece ao valor das fracções à medida que nos deslocamos de uma linha para a seguinte? E o que acontece às fracções quando nos deslocamos numa linha paralela aos lados? E o que acontece ao valor das fracções à medida que nos deslocamos em cada um dos lados do triângulo? Será que todas as fracções do triângulo são unitárias?

Indicações suplementares. Esta tarefa poderá ser retomada, em outro momento, solicitando aos alunos que escrevam, recorrendo à calculadora, o triângulo equivalente ao dado utilizando a representação decimal dos números racionais positivos. Acerca deste triângulo podem ser colocadas algumas questões, tais como:

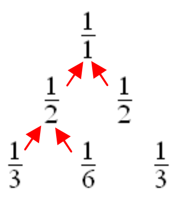
- Que tipo de dízimas aparecem no novo triângulo?
- Que tipo de fracções dão origem a cada tipo de dízimas?
- Que regularidades podem ser observadas no novo triângulo?

Esta abordagem permite estabelecer conexões com o trabalho realizado na tarefa “Investigando dízimas”, recordando, aprofundando e alargando os conceitos aí abordados, como os de dízima, classificação de dízimas, período da dízima, fracção decimal e número decimal.

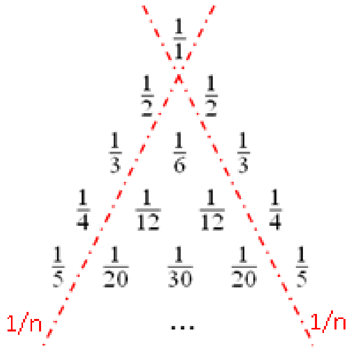
De forma a consolidar as aprendizagens realizadas nesta tarefa, o professor pode promover a exploração das cartas números 2, 35, 39 ou 42 do jogo *Men-Tal*.

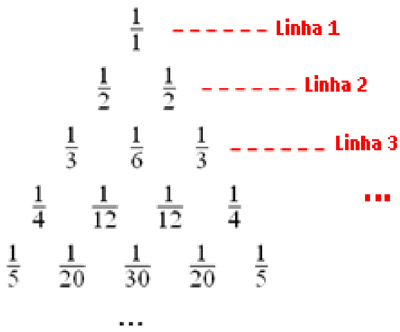
Possíveis explorações dos alunos

No ponto 1 da tarefa, os alunos, partindo da exploração das primeiras linhas do triângulo, começam por procurar regularidades numéricas. Assim, verificam que 1/1 é a soma de 1/2 com 1/2 ou que 1/2 é a soma de 1/3 com 1/6:



Os alunos verificam igualmente que as fracções que compõem os lados não horizontais do triângulo são do tipo $\frac{1}{n}$, sendo n o número da linha respectiva. Na quarta linha, verificam que 1/12 (segundo e terceiro elementos da linha) se obtém calculando a diferença entre 1/3 e 1/4:



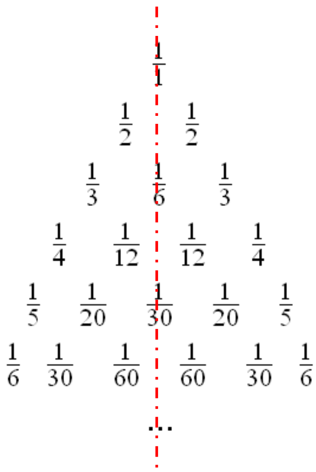


Com base nestes dados, os alunos formulam uma conjectura, fazendo o registo seguinte:

> O triângulo é formado por fracções, todas com numerador 1. À medida que andamos para baixo, o triângulo tem mais uma fracção em cada linha.
> As fracções de fora são sempre 1/1, 1/2, 1/3, 1/4 e assim por diante (o denominador aumenta 1). Para achar as fracções de dentro, fazemos primeiro um pequeno triângulo com três fracções que estejam todas juntas. Para saber a debaixo, vamos à do vértice de cima e tiramos a outra que sabemos: 1/3 – 1/4 = 1/12.
> É sempre assim para as outras fracções (Relatório de grupo).

Os alunos admitem esta conjectura, que testam antes na quinta linha, para escrever as duas linhas seguintes. Assim, nos extremos da linha 6, está a fracção 1/6 e, imediatamente a seguir, de ambos os lados, fica a fracção $\frac{1}{30}$ que resulta de $\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$.

O preenchimento das linhas é facilitado pela simetria existente no triângulo, já que basta determinar todas as fracções de uma linha, até à(s) fracção(ões) central(ais):



A sétima linha é composta por sete fracções: 1/7; 1/42; 1/105; 1/140; 1/105; 1/42; 1/7. Note-se, igualmente, que o número de elementos em cada linha é igual ao número da linha, e ainda que nas linhas com um número ímpar de elementos há uma "fracção central" e que nas linhas com um número par de fracções há duas "fracções centrais":

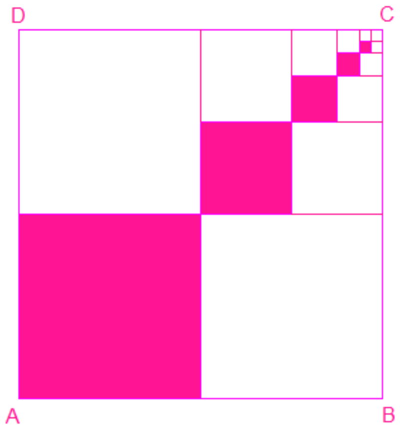
$$\begin{array}{c}
\frac{1}{1} \\[4pt]
\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \\[4pt]
\frac{1}{3} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{3} \\[4pt]
\frac{1}{4} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{4} \\[4pt]
\frac{1}{5} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{5} \\[4pt]
\frac{1}{6} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{60} \quad \frac{1}{60} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{6} \\[4pt]
\ldots
\end{array}$$

No ponto 2 da tarefa, os alunos podem verificar, para além de outras regularidades, que todas as fracções têm numerador 1 e que os denominadores das fracções da segunda "diagonal" se podem obter pelo produto dos denominadores das fracções da primeira "diagonal":

$$\begin{array}{c}
\frac{1}{1} \\[4pt]
\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \\[4pt]
\frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \quad \frac{1}{3} \\[4pt]
\frac{1}{4} \times \frac{1}{12} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{4} \\[4pt]
\frac{1}{5} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{5} \\[4pt]
\frac{1}{6} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{60} \quad \frac{1}{60} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{6} \\[4pt]
\ldots
\end{array}$$

Quadrados sombreados… até ao infinito[7]

Observa o quadrado ABCD. Imagina que a região sombreada se repete de acordo com o padrão da figura, originando sempre mais quadrados. Desse modo, que parte do quadrado ABCD ficará sombreada?



[7]Inspirada na tarefa "*Fractional parts*" (http://intermath.coe.uga.edu/topics/nmcncept/fractns/a08.htm) em 06.04.2008

Quadrados sombreados… até ao infinito

Conhecimentos prévios dos alunos

Com o trabalho desenvolvido no 1.º ciclo e no 5.º ano, os alunos devem:

- Compreender e usar um número racional como quociente e relação parte-todo;
- Ser capazes de:
  - Identificar e dar exemplos de fracções equivalentes a uma dada fracção e escrever uma fracção na sua forma irredutível;
  - Interpretar uma potência de expoente natural como um produto de factores iguais;
  - Investigar regularidades numéricas.

Aprendizagens visadas

Com o seu trabalho nesta tarefa, os alunos devem ser capazes de:

- Adicionar números racionais não negativos representados em diferentes formas;
- Averiguar da possibilidade de abordagens diversificadas para a resolução de um problema;
- Formular e testar conjecturas e generalizações e justificá-las fazendo deduções informais;
- Discutir resultados, processos e ideias matemáticos.

Orientações para apresentação e exploração da tarefa

Indicações gerais. A resolução deste problema permite trabalhar a adição de números racionais não negativos e estabelecer conexões com outros dois temas matemáticos do Programa: Geometria e Álgebra. Ao nível da Geometria, a tarefa apela à capacidade de visualização de uma sequência de quadrados, sombreados e não sombreados, que se vão obtendo por divisão de quadrados anteriores. Ao nível da Álgebra, a tarefa conduz à identificação de regularidades e padrões (conforme se escolha uma abordagem numérica ou geométrica para a sua resolução). Em qualquer dos casos, este trabalho possibilita ao aluno o desenvolvimento do sentido de número racional não negativo e da operação adição neste conjunto numérico e permite, igualmente, a formulação e teste de conjecturas.

Esta tarefa decorre em 90 minutos, 45 dos quais são destinados à sua resolução em pares ou em pequenos grupos e os restantes à apresentação, discussão e sistematização dos resultados.

Exploração da tarefa. A abordagem a esta tarefa inicia-se por uma estimativa da parte do quadrado ABCD sombreada. O professor conduz a discussão no sentido de evidenciar que aquela parte sombreada está entre 1/4 e 1/2 do quadrado.

O trabalho em pequenos grupos inicia-se com a representação, através de números racionais, de cada uma das partes sombreadas do quadrado ABCD. Para isso, o mais natural é a utilização de fracções expressando a relação entre a parte e o todo (uma parte de 4, ou 1/4, uma parte de 16, ou 1/16,...). Os alunos podem também recorrer a numerais decimais para representar as partes sombreadas, calculando o quociente exacto de 1 por 4, de 1 por 16, de 1 por 64, mais genericamente, de 1 pelas sucessivas potências de base 4 (a representação decimal de $\frac{1}{4}$ é um valor já conhecido dos alunos). A utilização da representação decimal causa algumas dificuldades pelo número de ordens decimais dos numerais:

Numerador	Denominador	Quociente
1	4	0,25
1	16	0,0625
1	64	0,015625
1	256	0,00390625
1	1024	0,0009765625
1	…	…

Recorrendo à representação fraccionária, os alunos escrevem ordenadamente as fracções que representam os sucessivos quadrados sombreados na figura:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{4^5} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\frac{1}{1024}$$

Em ambas as representações, é importante explorar a sequência das parcelas, identificando regularidades nos numeradores e nos denominadores. É importante também explorar o valor de cada fracção e a relação do valor de cada uma delas com o da anterior e com o da seguinte. Esta exploração é apoiada pela observação da figura.

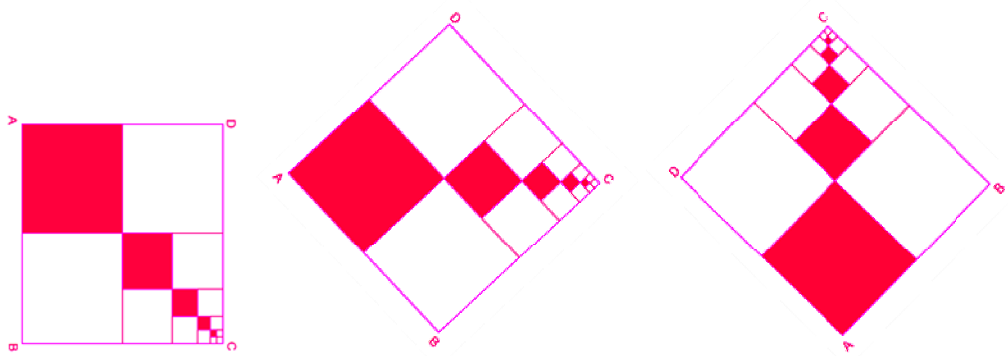
Para determinar a parte do quadrado ABCD que está sombreada, os alunos calculam a soma dos números racionais, depois de escreverem fracções equivalentes com o mesmo denominador (tirando partido dos seus conhecimentos sobre produto de potências com a mesma base; por exemplo: $4^5 = 4 \times 4^4$):

$$\frac{256}{1024}+\frac{64}{1024}+\frac{16}{1024}+\frac{4}{1024}+\frac{1}{1024}=\frac{341}{1024}.$$

É essencial o professor explorar o significado do denominador 1024 e de cada um dos numeradores das fracções. No final, os alunos determinam o quociente de 341 por 1024 para terem um valor aproximado da parte do quadrado ABCD sombreada.

No caso de os alunos determinarem apenas a parte da figura que está efectivamente sombreada, o professor questiona sobre o que acontece ao valor da soma quando se continua o padrão. Para fazer este estudo, o professor disponibiliza a calculadora e o computador. Recorrendo à calculadora, os alunos registam as somas parciais, podendo igualmente tirar partido da tecla M^+, que regista o acumulado dessas somas. O recurso à folha de cálculo (com um modelo previamente construído pelo professor) permite evidenciar com maior clareza a aproximação da soma a 1/3.

Indicações suplementares. O professor explora a mesma situação com a figura em posições distintas. Realizar a tarefa com a figura em posições diferentes, ou sugerir aos alunos que a coloquem em posições diferentes, estimula a visualização e pode originar estratégias de resolução diferentes.



Ao observar as várias figuras, o aluno verifica que um em cada três quadrados congruentes está sombreado, isto é, estabelece a razão 1 para 3 (confrontar com a última resolução de alunos, apresentada para esta tarefa).

O professor tem oportunidade de retomar esta tarefa no 6.º ano de escolaridade, ao tratar a multiplicação de números racionais não negativos. Assim, a representação e determinação de cada uma das parcelas da soma obtém-se como um produto de factores $\frac{1}{4}$ ou potências de base $\frac{1}{4}$.

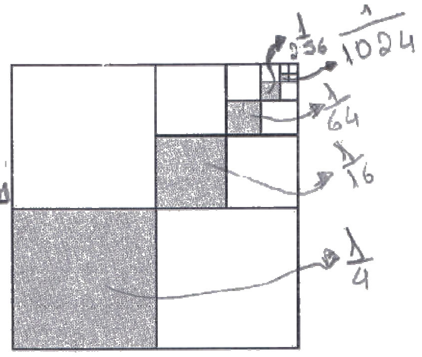
Esta tarefa também pode ser retomada aquando da abordagem das áreas e dos perímetros de polígonos. Os alunos exploram as regularidades que surgem quando se determinam sucessivamente as medidas dos perímetros e das áreas dos quadrados sombreados, tomando como medida para o perímetro do quadrado ABCD, por exemplo, 128 cm. Esta é também uma boa oportunidade para explorar as razões entre as medidas do perímetro e da área e a medida do lado do quadrado.

Como forma de aprofundar as aprendizagens realizadas durante a exploração desta tarefa, o professor poderá propor aos alunos a realização das situações apresentadas nas cartas números 18, 33, 35 e 36 do jogo *Men-Tal*.

Possíveis explorações dos alunos

Os alunos começam por escrever as fracções que representam cada uma das partes sombreadas. Recorrendo aos seus conhecimentos sobre fracções equivalentes e ao algoritmo da adição, determinam a soma:

Para chegarmos ao resultado multiplicámos por 4, porque os quadrados são $\frac{1}{4}$ do anterior.



$$\frac{1}{4_{(256)}}+\frac{1}{16_{(64)}}+\frac{1}{64_{(16)}}+\frac{1}{256_{(4)}}+\frac{1}{1024}=$$

$$=\frac{256}{1024}+\frac{64}{1024}+\frac{16}{1024}+\frac{4}{1024}+\frac{1}{1024}=\frac{341}{1024}$$

R.: Ocupa $\frac{341}{1024}$ do quadrado grande.

$\frac{341}{1024}=0,3330078$ (aproximadamente $\frac{1}{3}$.)

Contudo, os alunos apenas determinam a fracção correspondente à parte da figura sombreada, não atendendo à ideia da continuidade do padrão. Assim sendo, o professor questiona os alunos sobre se as suas conclusões continuam a verificar-se se continuarem o padrão, ou seja, se a parte sombreada continua a aproximar-se de 1/3 do quadrado ABCD.

Para calcularem o valor da soma $\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{4^5}$, em vez de trabalharem com a representação fraccionária, os alunos podem optar por usar a representação decimal, recorrendo à calculadora. Neste caso, o professor sugere, para a determinação das potências de base 0,25, a utilização do factor constante e depois, para o cálculo das somas, a utilização da tecla M^+. Esta estratégia é uma boa forma de evidenciar a aproximação da soma das partes sombreadas a 1/3 do quadrado.

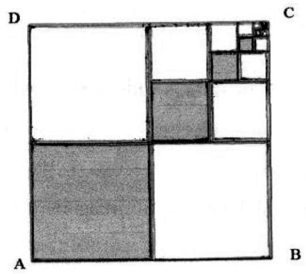
Numa outra resolução, os alunos tomam como unidade de medida de área o quadrado mais pequeno. A soma das áreas dos quadrados sombreados é então dada por:

$$1^2+2^2+4^2+8^2+16^2=1+4+16+64+256=341 \text{ (unidades de área).}$$

A parte do quadrado que está sombreada é $\frac{341}{1024} \approx 0{,}33078 \approx \frac{1}{3} \approx 33\%$. A aproximação continua a manter-se, uma vez que a região sombreada se repete seguindo o mesmo padrão.

A resposta a esta tarefa pode surgir da observação da figura, na qual é possível identificar três "módulos" semelhantes, sendo dois deles brancos e apenas um sombreado. Desse modo, conclui-se que o "módulo" sombreado corresponde a 1/3 do quadrado ABCD. A resolução seguinte, apresentada por uma aluna, segue esta estratégia:

O quadrado ABCD tem 3 filas de quadrados (verde, azul e vermelho). A fila do meio, limitada a azul, é a que tem quadrados sombreados. Assim a parte do quadrado ABCD sombreada é $\frac{1}{3}$.



Desconto de desconto

Será que… Um desconto de 30% sobre o preço inicial de um MP3 seguido de um novo desconto de 50% equivale a efectuar um desconto de 80% sobre o preço inicial?

Desconto de desconto

Conhecimentos prévios dos alunos

Com o trabalho desenvolvido no 1.º ciclo e no 5.º ano, os alunos devem:

- Compreender e usar o número racional como quociente, relação parte-todo, razão, medida e operador;
- Ser capazes de:
  - Relacionar diferentes representações dos números racionais não negativos;
  - Multiplicar com números racionais não negativos na representação decimal;
  - Resolver problemas que envolvam números racionais não negativos.

Aprendizagens visadas

Com o seu trabalho nesta tarefa, os alunos devem:

- Compreender a noção de percentagem e relacionar diferentes formas de representar uma percentagem;
- Ser capazes de:
  - Calcular e usar percentagens;
  - Traduzir uma fracção por uma percentagem e interpretá-la como o número de partes em 100;
  - Identificar os dados, as condições e o objectivo do problema;
  - Discutir resultados, processos e ideias matemáticos.

Orientações para apresentação e exploração da tarefa

Indicações gerais. Esta tarefa, um problema que parte de uma situação que pode surgir no quotidiano dos alunos, permite evidenciar o conceito de percentagem e a sua relação com diferentes formas de representar números racionais não negativos (fracção decimal e numeral decimal). A percentagem surge neste problema com os sentidos de razão e de operador.

A situação apresentada pode ser resolvida num período de 45 minutos. Inicialmente, o professor introduz a tarefa trabalhando o conceito de percentagem como um certo número de partes em cem. Em seguida, os alunos trabalham individualmente durante cerca de 20 minutos, ficando os restantes para a discussão e sistematização de resultados.

Exploração da tarefa. O professor introduz a tarefa colocando questões sobre o seu enunciado e, mais globalmente, sobre o conceito que os alunos têm de percentagem. Neste sentido, dialoga com os alunos sobre situações que envolvam descontos. Nesta fase, pode ser usado um modelo de 10 por 10 para explorar o significado de considerar diferentes partes em 100, representando-as nesse modelo e relacionando-as em diferentes representações. O professor pode aproveitar para explorar mais detalhadamente, por exemplo, as situações de 30%, 50% e 80% e a sua equivalência a 0,3; 0,5 ou metade e 0,8, respectivamente. Os alunos compreendem que efectuar um desconto de 20%, por exemplo, sobre um dado preço inicial, consiste em reduzir esse preço em 20 euros por cada 100 euros do seu valor, o mesmo é dizer que consiste em reduzir esse preço em 2 euros por cada 10 euros do preço inicial. É fundamental explorar também situações cujo valor é diferente de 100, assim como fazer sobressair a percentagem como operador.

Para dar resposta ao problema, os alunos necessitam de considerar inicialmente um determinado preço, uma vez que não é apresentado qualquer valor no enunciado, facto que pode trazer dificuldades. No caso de os alunos não avançarem, o professor sugere que considerem então, por exemplo, o valor inicial de 100 €. Os alunos começam por determinar o desconto de 30% sobre os 100 €. Assim, determinam 30% de 100 € e, de seguida, consideram a diferença do valor resultante para os 100 €. O segundo desconto é aplicado à diferença obtida. Neste segundo momento, o professor realça o facto de um desconto de 50% corresponder a considerar metade do respectivo valor e portanto não ser necessário efectuar a diferença para encontrar o valor a pagar. Para valores de referência como 10%, 25% e 50%, o professor incita os alunos a calcular mentalmente o desconto.

Nesta tarefa é especialmente importante que os alunos organizem a informação, por exemplo, numa tabela onde indicam o valor inicial, os descontos efectuados e os valores a pagar. O professor desafia igualmente os alunos a escreverem uma expressão numérica que responda ao problema apresentado: $(100 - 0{,}3 \times 100) \times 0{,}5$. Para verificarem se um desconto de 30% sobre um determinado valor, seguido de um desconto de 50% sobre o valor obtido após o primeiro desconto equivale a um desconto de 80% sobre o valor inicial, os alunos determinam 80% do valor inicial calculando, de seguida, a diferença entre este valor e o inicial. Também nesta fase, o professor incentiva os alunos a traduzirem este raciocínio por uma expressão numérica: $100-0{,}8\times100$. Concluem então que não são equivalentes as duas formas de desconto apresentadas no enunciado da tarefa.

Na fase de discussão, com vista a alargar o conhecimento dos alunos sobre o significado de desconto, o professor realça que um desconto de 30% equivale a considerar um decréscimo de 30 unidades em 100 e portanto a obter 70 unidades das mesmas 100. O mesmo raciocínio é efectuado para os casos de desconto igual a 50% e a 80%. Apoiando-se nesta ideia, os alunos compreendem que o problema pode ser resolvido, no primeiro caso, considerando directamente 70% do valor inicial seguido de 50%, ou seja, $(0{,}7\times100)\times0{,}5$ e, no segundo caso, efectuando directamente 20% do valor inicial, ou seja, $(0{,}2\times100)$. Uma vez que os alunos têm conhecimento, do ciclo anterior, de que 50% equivale a metade ou a 0,5, compreendem que 50% de 70% corresponde a considerar directamente 35% desse valor (diferente de considerar 20% como no outro caso), e portanto, a expressão anterior assume uma forma simplificada: $(0{,}7\times100)\times0{,}5=0{,}35\times100$. Este procedimento permite encontrar, de uma forma directa, o valor a pagar após um determinado número de descontos.

Indicações suplementares. O professor evidencia a equivalência das duas formas (calcular um desconto de 30% seguido de 50% ou directamente 35%) através da análise das respectivas expressões numéricas.

O professor incentiva os alunos a generalizar a situação apresentada, isto é, a encontrar directamente o valor a pagar após um determinado número de descontos, independentemente do valor inicial. Além disso, o professor pode sugerir que os alunos procurem em folhetos publicitários, revistas e jornais situações análogas à apresentada, envolvendo múltiplos descontos, e façam a sua exploração.

Como forma de consolidar as aprendizagens realizadas nesta tarefa, o professor poderá propor aos alunos a realização das situações apresentadas nas cartas números 8, 9, 13, 26, 27 e 31 do jogo *Men-Tal*.

Possíveis explorações dos alunos

Na resolução que se apresenta em seguida, os alunos determinam o valor a pagar após aplicarem, sucessivamente, os descontos indicados, partindo do valor inicial que escolheram (10 €):

10 € → 30% + 50%	10 € → 80%
0,30×10 = 3 €	0,80× 10 = 8 €
10 − 3 = 7 €	10 − 8 = 2 €
0,50×7 = 3,5 €	

Na resolução seguinte, os alunos compreendem que um desconto de 30% equivale a determinar 70% do valor inicial, assim como nos restantes casos. Para tal, consideram um valor inicial de 80 €:

Vamos começar por dar um exemplo:
Um casaco custava 80€.
Agora fazemos um desconto de 30%.
70% de 80€ = 0,7 × 80 = 56 €
Depois fazemos um desconto de 50%.
50% de 56 € = 0,5 × 56 = 28 €
Para vermos se era equivalente estes dois descontos a 80% fizemos:
20% de 80€ = 0,2 × 80 = 16€
R: Com estas proporções descobrimos que o desconto de 80% é maior do que 50% e 30%.

Descontos na *Bit-@-byte*

Na loja *Bit-@-byte* um computador custa 800 €. No 1.º dia de cada mês a loja reduz o seu preço em 10% relativamente ao valor anterior.

1. Ao fim de quantos meses o preço do computador passa a ser inferior a metade do inicial?

2. Que desconto, aproximadamente, deve ser efectuado, todos os meses, para que um computador que custe 950 € passe a custar menos de 400 €, a partir do 4.º mês?

Descontos na *Bit-@-byte*

Conhecimentos prévios dos alunos

Com o trabalho já desenvolvido no 1.º ciclo e no 5.º ano, os alunos devem:

- Compreender a noção de percentagem e relacionar diferentes formas de representar uma percentagem;
- Compreender que com a multiplicação de um número por 0,1 se obtém o mesmo resultado do que com a divisão desse número por 10.
- Ser capazes de:
  - Multiplicar com números racionais não negativos na representação decimal;
  - Traduzir uma fracção por uma percentagem e interpretá-la como o número de partes em 100;
  - Estimar e calcular mentalmente com números racionais não negativos representados na forma decimal.

Aprendizagens visadas

Com o seu trabalho nesta tarefa, os alunos devem ser capazes de:

- Calcular e usar percentagens;
- Resolver problemas que envolvam números racionais não negativos;
- Identificar os dados, as condições e o objectivo do problema.

Orientações para apresentação e exploração da tarefa

Indicações gerais. Esta tarefa é um problema inspirado numa situação de descontos envolvendo percentagens. A tarefa é explorada em cerca de 45 minutos, sendo os primeiros 25 dedicados ao trabalho autónomo dos alunos e os restantes destinados à discussão e sistematização de resultados e conceitos. Na primeira parte, os alunos trabalham individualmente e o professor acompanha o seu trabalho, coloca questões ou dá pistas para que consigam avançar. Os alunos devem ser estimulados a efectuar mentalmente, cálculos simples, como, por exemplo, os produtos de um número por 0,1 e 0,2. Nos cálculos mais complexos a calculadora pode ser importante na realização da tarefa. A folha de cálculo é também um recurso que pode ser utilizado na exploração desta tarefa, especialmente na segunda parte.

Exploração da tarefa. Para responder à primeira questão é necessário determinar descontos sucessivos de 10%. O desconto de 10% deve ser compreendido pelos alunos como um decréscimo do preço de 10 unidades em cada 100 unidades da mesma espécie, isto é, neste problema, um decréscimo de 10 euros em 100 euros ou de 10 cêntimos em cem cêntimos (1 euro). Como o preço inicial do computador é de 800 euros (8×100 euros), o desconto é de 80 euros (8×10 euros). Mas se o preço do computador for de 720 euros (preço no fim do 1.º mês), já que este valor é 7×100 euros $+20\times100$ cêntimos, o desconto é de 7×10 euros $+\ 20\times10$ cêntimos, ou seja, de 72 euros. Estas operações permitem ao aluno compreender o significado de "dez por cento", 10%, 10/100. Para além disso, o aluno compreende também a equivalência dessas expressões, entre si, e a 0,1.

Depois de calcular o desconto, os alunos apuram o valor a pagar em cada mês. Um procedimento equivalente a este corresponde a determinar 90% do valor inicial, já que esse é o valor a pagar. É importante explorar também esta via com os alunos, evidenciando, por exemplo, com o auxílio de um gráfico circular, a equivalência das duas estratégias de resolução.

A segunda questão da tarefa - *Que desconto, aproximadamente, deve ser efectuado, todos os meses, para que um computador que custe 950 € passe a custar menos de 400 €, a partir do 4.º mês?* - apela à realização de estimativas, já que é solicitada a determinação da percentagem do desconto. É importante que os alunos compreendam, por exemplo, que ao começar por experimentar percentagens de desconto próximas de 50%, ao fim do segundo mês o valor indicado já terá sido atingido. Por outro lado, os alunos também já sabem, da questão anterior que, quando o valor inicial do computador é de 800 euros e o desconto de 10%, o preço do computador é inferior a 400 euros ao fim de 7 meses. Logo, sendo o valor inicial superior a 800 euros e pretendendo que o preço do computador seja inferior a 400 euros, a partir do 4.º mês, a percentagem de desconto terá que ser superior a 10%. De forma a facilitar os cálculos, os alunos podem testar, por exemplo, o que acontece se o desconto for de 20% e verificar a razoabilidade da resposta.

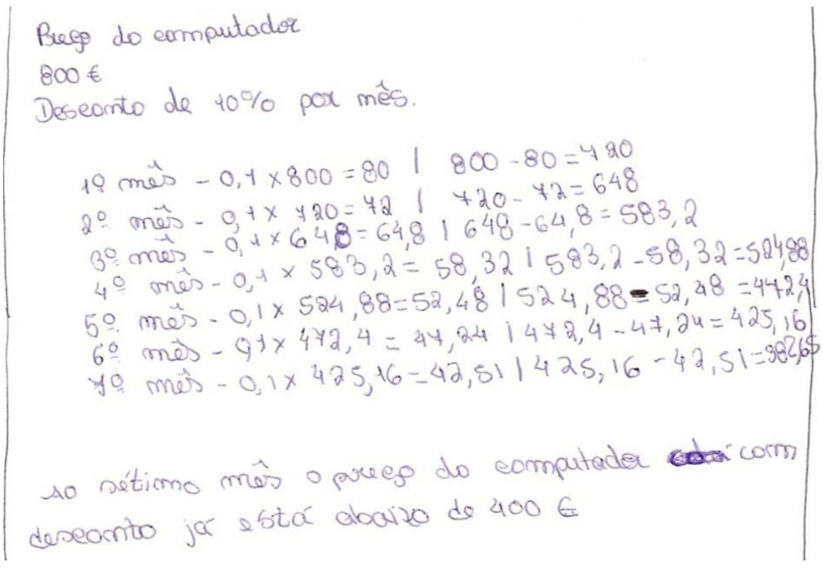
A utilização da calculadora é pertinente nesta fase da tarefa, permitindo também que os alunos adquiram alguma destreza no seu manuseamento, nomeadamente no que respeita à utilização da tecla %. Quando os alunos utilizam a calculadora, é fundamental que procedam à indicação, no papel, dos cálculos efectuados. A resolução deste problema é facilitada por uma boa organização dos registos, preferencialmente usando tabelas.

Indicações suplementares. Para além das questões apresentadas nesta tarefa, o professor pode questionar os alunos sobre o que acontece ao número de meses necessários para que o preço do computador atinja um valor inferior a 400 euros quando se reduz para metade, quando se duplica ou quando se triplica a percentagem do desconto. Será interessante questionar também os alunos sobre o que acontece ao número de meses necessários para que o preço do computador atinja um valor inferior a 400 euros quando o preço inicial for o dobro ou metade do apresentado. Este trabalho assume, assim, uma natureza investigativa, sendo pertinente para o seu desenvolvimento o recurso à folha de cálculo.

Como forma de consolidar a aprendizagem dos alunos em situações que envolvam o uso e cálculo de percentagens, o professor pode explorar situações como as apresentadas nas cartas números 8, 9, 26, 27, 28 e 31 do jogo *Men-Tal*.

Possíveis explorações dos alunos

Os alunos começam por determinar o preço do computador depois de decorrido o primeiro mês. Para isso, calculam 10% de 800 euros e subtraem esse valor ao preço inicial. Em seguida, para saberem o preço do computador passado o segundo mês, calculam 10% de 720 euros (preço do computador no fim do 1.º mês) e subtraem o valor encontrado ao preço do computador (720 euros). Este procedimento é repetido até encontrar um preço para o computador que se situe abaixo de 400 euros:


Preço do computador
800 €
Desconto de 10% por mês.

1º mês - 0,1 x 800 = 80 | 800 - 80 = 720
2º mês - 0,1 x 720 = 72 | 720 - 72 = 648
3º mês - 0,1 x 648 = 64,8 | 648 - 64,8 = 583,2
4º mês - 0,1 x 583,2 = 58,32 | 583,2 - 58,32 = 524,88
5º mês - 0,1 x 524,88 = 52,48 | 524,88 - 52,48 = 472,4
6º mês - 0,1 x 472,4 = 47,24 | 472,4 - 47,24 = 425,16
7º mês - 0,1 x 425,16 = 42,51 | 425,16 - 42,51 = 382,65

ao sétimo mês o preço do computador com desconto já está abaixo de 400 €

Em alternativa, os alunos começam por determinar 90% do preço inicial do computador, sendo esse o valor a pagar pelo computador no segundo mês, e assim sucessivamente.

A resposta às questões apresentadas nesta tarefa é facilitada pela organização, em tabela, dos dados e dos cálculos que os alunos efectuam. Na primeira questão, os alunos podem organizar a sua resposta de uma forma semelhante à que se segue:

Preço inicial do computador: 800 €
Desconto: 10%

mês	valor do desconto	preço do computador
1.º	80	720
2.º	72	648
3.º	64,8	583,2
4.º	58,32	524,88
5.º	52,48	472,40
6.º	47,23	425,17
7.º	42,51	**382,66**

É igualmente importante que os alunos escrevam as expressões que lhes vão permitindo obter os valores registados na tabela, como por exemplo, $800 - 0{,}1 \times 800 = 720$. Esta é uma boa altura para, tirando partido das propriedades das operações e ligando à outra estratégia de resolução, explorar a equivalência das expressões $800 - 0{,}1 \times 800$ e $0{,}9 \times 800$.

Na segunda questão, os alunos determinam a percentagem de desconto que é necessário fazer para que um computador, com o preço inicial de 950 €, custe menos de 400 € ao fim de 4 meses. Assim, estimam que, por exemplo, um desconto de 50% faz com que no final do primeiro mês o computador custe apenas 475 € e que no final do segundo mês custe pouco mais de 200 €. Ora, o que se pretende é que apenas ao fim de 4 meses o preço seja menor que 400 €. No caso de os alunos desenvolverem um raciocínio semelhante ao descrito anteriormente, é natural que reduzam substancialmente o valor da percentagem do desconto. A utilização de valores de percentagem múltiplos de 10 facilita os cálculos, dispensando a utilização da calculadora. Deste modo, os alunos experimentam o que acontece para 20% e organizam a sua resposta do seguinte modo:

Preço inicial do computador: 950 €
Desconto: 20%

mês	valor do desconto	preço do computador
1.º	190	760
2.º	152	608
3.º	121,6	486,4
4.º	97,28	**389,12**

Esta é uma resposta que satisfaz as condições do enunciado. No entanto, são possíveis outras. Se os alunos puderem dispor de uma folha de cálculo, devem ser incentivados a estudar o que acontece para percentagens de desconto próximas dos 20% e dos 25%:

mês	**Preço com desconto (%) de**												
%	19	19,5	20,5	21	21,5	22	22,5	23	23,5	24	24,5	25	25,5
Inicial	950	950	950	950	950	950	950	950	950	950	950	950	950
1.º	769,50	764,75	755,25	750,50	745,75	741,00	736,25	731,50	726,75	722,00	717,25	712,50	707,75
2.º	623,29	615,62	600,42	592,90	585,41	577,98	570,59	563,26	555,96	548,72	541,52	534,38	527,27
3.º	504,86	495,57	477,34	468,39	459,55	450,82	442,21	433,71	425,31	417,03	408,85	400,78	**392,82**
4.º	408,94	**398,93**	**379,48**	**370,03**	**360,75**	**351,64**	**342,71**	**333,95**	**325,36**	**316,94**	**308,68**	**300,59**	292,65

Investigando percentagens no corpo humano

Há alguma relação entre a medida da nossa altura e as medidas dos comprimentos de outras partes do nosso corpo? Expressa essas relações através de percentagens da tua altura.

Investigando percentagens no corpo humano

Conhecimentos prévios dos alunos

Com o trabalho desenvolvido no 1.º ciclo e no 5.º ano, os alunos devem ser capazes de:

- Realizar medições utilizando unidades de medida convencionais (centímetro, metro);
- Estimar comprimentos;
- Ler e escrever números na representação decimal (até à milésima) e relacionar diferentes representações dos números racionais não negativos.

Aprendizagens visadas

Com o seu trabalho nesta tarefa, os alunos devem ser capazes de:

- Calcular e usar percentagens;
- Resolver problemas que envolvam números racionais não negativos;
- Exprimir ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito, usando a notação, simbologia e vocabulários próprios;
- Discutir resultados, processos e ideias matemáticos.

Orientações para apresentação e exploração da tarefa

Indicações gerais. Esta tarefa constitui uma investigação que pode ser desenvolvida num bloco de 90 minutos, sendo os primeiros 45 minutos para o trabalho autónomo dos alunos e os restantes 45 para a discussão. Dada a natureza da tarefa, o funcionamento em grupos de 3 ou 4 alunos ajusta-se bem ao trabalho que se pretende desenvolver.

Com esta tarefa procura-se trabalhar o tópico *percentagem* no contexto da investigação da seguinte questão: *Há alguma relação entre a medida da nossa altura e as medidas do comprimento de outras partes do nosso corpo?* Para responder a esta questão, os alunos têm que colocar em jogo diversos conhecimentos sobre temas matemáticos e diversas capacidades transversais. Assim, para além de compreenderem a noção de percentagem e relacionarem diferentes formas de a representar, os alunos têm de tomar diversas medidas de comprimentos de partes do corpo, como a altura, a envergadura, a mão, o pé ou o perímetro da cabeça. Na sua actividade, os alunos têm de trabalhar com números racionais não negativos, na sua forma decimal, operando com eles. A tarefa proporciona, igualmente, um volume apreciável de dados na forma de medidas de comprimentos e de percentagens, requerendo que os alunos sejam capazes de os organizar e analisar. Por isso, esta tarefa favorece o estabelecimento de conexões com outros temas e tópicos do programa de Matemática.

Dada a natureza aberta da tarefa – concretizada através de um curto enunciado da questão de investigação –, os alunos têm no início que identificar o que é pedido e a informação necessária para lhe responder. E têm, depois, de conceber e pôr em prática estratégias de resolução. Numa segunda fase, os alunos têm que ser capazes de explicar e justificar ideias e resultados, discutindo-os com os colegas e o professor. Desta forma, desenvolvem diversas capacidades transversais.

Exploração da tarefa. Para a resolução desta tarefa, o professor deve ter disponíveis instrumentos de medida de comprimento, como réguas e fitas métricas, mas não os deve distribuir juntamente com o enunciado. A procura destes instrumentos deve corresponder a uma necessidade dos alunos para a resolução da tarefa, levando-os igualmente a fazer as escolhas que considerem mais adequadas. Esta estratégia do professor pode levar os alunos, na fase inicial, a pensar que talvez baste uma estimativa das relações entre os comprimentos, prescindindo de utilizar instrumentos convencionais de medida e recorrendo a outros processos (como a comparação com outros comprimentos, por exemplo, o palmo ou o lápis). Nessa perspectiva, e para que os alunos desenvolvam estratégias para estimar e calcular mentalmente percentagens, o professor começa por trabalhar valores de referência como 75%, 50%, 25%, 12,5%, a partir da dobragem de uma tira de papel (como na tarefa *Dobras e mais dobras*) ou de um círculo (neste último caso, é interessante relacionar a percentagem que se tem do círculo inicial com o ângulo ao centro correspondente: 270º, 180º, 90º, 45º, 22,5º). De igual modo, o professor deve sublinhar que 10% corresponde a $\frac{1}{10}$ e 1% a $\frac{1}{100}$.

Ainda antes de distribuir a tarefa, o professor pode optar por trabalhar com os alunos a estimação e o cálculo de percentagens. Para isso, coloca questões como: Imaginem que tenho de altura 160 cm. A quanto corresponde 50% da minha altura? E 25%? E 75%? E 10%? Depois disso, pede aos alunos que estimem qual a percentagem que o comprimento do seu pé é da altura. E o palmo?

Uma vez distribuído o enunciado da tarefa, o professor começa a acompanhar o trabalho dos alunos para se certificar que estes determinam as suas alturas e as outras medidas do corpo, expressando-as como percentagens da primeira medida.

Uma vez que os alunos vão lidar com muitos dados numéricos, é importante que sejam orientados no sentido de terem registos organizados para poderem tirar conclusões sobre regularidades nessas medidas e percentagens.

O professor incentiva os alunos a elaborar um relatório do trabalho desenvolvido, que conclui com a resposta à investigação proposta. Na fase de discussão, cada grupo apresenta os seus resultados, apoiando-se nesse relatório, devendo depois o professor convocar os alunos para fazer a sistematização e análise dos resultados da turma. Para as diversas medidas e percentagens, são determinados os intervalos de variação de cada uma delas e calculados os seus valores médios. A resposta à questão – *Há alguma relação entre a medida da nossa altura e as medidas dos comprimentos de outras partes do nosso corpo?* – será o culminar de toda a discussão, tendo o professor o cuidado de fazer sentir aos alunos que os resultados não expressam nenhuma norma, sendo de esperar que haja pessoas com valores diferentes.

Indicações suplementares. Como extensão desta tarefa no 6.º ano, o professor pode promover o estabelecimento de conexões com o tema *Álgebra*, trabalhando o tópico da proporcionalidade directa. Assim, propõe à turma, por exemplo, a construção de um boneco, com uma determinada altura, que mantenha as proporções aproximadas do corpo humano anteriormente investigadas. Dessa maneira, os alunos compreendem que, embora com medidas diferentes, as razões entre cada medida de uma parte do corpo e a altura são aproximadamente constantes. Este trabalho pode resultar mesmo num projecto interdisciplinar a desenvolver pela turma ao longo do ano escolar.

Possíveis explorações dos alunos

Esta tarefa foi desenvolvida por Joan Moss e Beverly Caswell[8], embora com outro enunciado, e incluída num trabalho mais vasto com percentagens e proporcionalidade. Antes de os alunos trabalharem as suas próprias medidas, o professor começa por colocar a seguinte questão: Olhem para o meu pé. Conseguem dizer-me que percentagem da minha altura é o comprimento do meu pé? Neste caso, as respostas dadas pelos alunos variaram entre 10% e 20%.

Então, o professor avança com a indicação da sua altura (168 cm) e da medida do comprimento do seu pé (23 cm) e convida os alunos a calcular mentalmente uma

---

[8] Moss, J. & Caswell, B. (2004). Building percent dolls: Connecting linear measurement to learning ratio and proportion. *Mathematics Teaching in the Middle School,*10(2), 68-74.

nova percentagem, melhorando a sua estimativa inicial. Os alunos comparam a medida da altura com a medida do comprimento do pé. Um aluno avança com a seguinte explicação: "*50% da altura do nosso professor é 84 cm. 25% da sua altura é 42 cm e 12,5% é 21 cm*" (p. 71). Esta estratégia deu aos alunos uma boa aproximação da percentagem da medida do comprimento do pé relativamente à altura. Contudo, um outro aluno toma a palavra e defende: "*Mas o pé mede 23 cm, logo [a percentagem] é um pouco mais. Logo, se adicionarmos mais 1% é 1,68 [1% de 168] ficamos mais próximos*" (p. 71).

Depois, os alunos trabalham a tarefa em grupo, começando por medir as suas alturas e a do professor, usando para isso instrumentos de medida de comprimento existentes na sala. Em seguida, definem alguns comprimentos do corpo humano que podem medir para comparar com a altura, como, por exemplo: envergadura, comprimentos do pé, da mão, da perna, do dedo mínimo e do perímetro da cabeça. Eis um dos exemplos calculados:

Percentagens corporais Altura = 168 cm	
Envergadura (168 cm)	100%
Pé (24 cm)	14%
Mão (17 cm)	10%
Perna (98 cm)	60%
Dedo mínimo (6 cm)	4%
Perímetro da cabeça (60 cm)	40%

Na fase de discussão, os alunos apresentam os seus resultados, explicando como calcular as percentagens – em alguns casos, como a mão, recorrendo ao cálculo mental; noutros, usando o algoritmo ou a calculadora. O professor regista, em conjunto com os alunos, as percentagens do comprimento de diversas partes do corpo relativamente à altura. Para cada um deles, definem-se os intervalos de variação e o seu valor médio.

MEN

TAL

JOGO DE CÁLCULO MENTAL

Este jogo é constituído por 44 cartas de três tipos: *unipergunta* (uma só pergunta) *multipergunta* (quatro perguntas) e *pergunta de resposta de escolha múltipla* (pergunta com possibilidades de resposta). Em cada uma delas são colocadas perguntas a que deves dar resposta recorrendo unicamente ao cálculo mental. Essas questões são sobre números racionais representados de diversas formas.

Regras

O jogo tem duas partes:

Na primeira parte:

1. Formam-se duas equipas.
2. Depois de baralhadas as cartas, cada equipa tira quatro, mantendo-as viradas para baixo.
3. Cada equipa vira alternadamente uma carta e coloca a pergunta à equipa adversária.
4. Cada resposta correcta nas cartas de *pergunta de resposta de escolha múltipla* (assinaladas com ●) vale 1 ponto, nas de *unipergunta* (assinaladas com ●) vale 2 pontos e nas de *mutipergunta* (assinaladas com ●) vale 1 ponto, por cada resposta correcta. Neste último caso, se a equipa responder correctamente às quatro questões, multiplica a pontuação obtida na carta por 1,5.
5. Cada equipa volta a tirar 4 cartas e a primeira a totalizar, pelo menos, 10 pontos termina a primeira parte.

Na segunda parte:

1. A equipa que tem menos pontos inventa uma pergunta, sobre números racionais, para colocar à equipa adversária.

2. No caso de a equipa responder correctamente, ganha o jogo. No caso de errar, perde $\frac{1}{2}$ dos pontos acumulados até aí e volta à fase anterior. O jogo continua sem reposição das cartas já saídas.

Jogo de cálculo mental

Conhecimentos prévios dos alunos

Com o trabalho desenvolvido no 1.º ciclo e no 5.º ano, os alunos devem:

- Compreender e usar um número racional como quociente, relação parte-todo, razão, medida e operador;
- Compreender a noção de percentagem e relacionar diferentes formas de representar uma percentagem;
- Ser capazes de:
  - Utilizar estratégias de cálculo mental para as operações adição e subtracção usando as suas propriedades;
  - Comparar e ordenar números racionais representados de diferentes formas;
  - Localizar e posicionar na recta numérica um número racional não negativo representado nas suas diferentes formas;
  - Adicionar e subtrair números racionais não negativos representados em diferentes formas;
  - Identificar e dar exemplos de fracções equivalentes a uma dada fracção e escrever uma fracção na sua forma irredutível;
  - Traduzir uma fracção por uma percentagem e interpretá-la como o número de partes em 100;
  - Calcular e usar percentagens.

Orientações para apresentação e exploração da tarefa

Indicações gerais. Este jogo é uma tarefa de consolidação, pois, ao contrário das outras, não se espera que os alunos trabalhem através dela novos conceitos ou procedimentos matemáticos. Com este jogo pretende-se que os alunos desenvolvam o seu cálculo mental (exacto e aproximado), tirando partido da compreensão dos números racionais, nos seus diversos significados e relações, e das operações adição e subtracção e suas propriedades. Os alunos devem ser capazes de calcular mentalmente a soma de um número inteiro com um número fraccionário (por exemplo, não faz sentido que um aluno tenha necessidade de recorrer ao cálculo escrito para determinar a soma de 2 com 1/2), fracções equivalentes a uma dada fracção ou uma percentagem (como 10%, 20%, 30%,...) de um número inteiro.

O jogo é realizado durante 45 minutos, com os alunos organizados em equipas. Cabe ao professor ajustar o número de elementos da equipa às características da turma. Há que ter em conta que um número muito elevado de equipas tem como consequência um acompanhamento distante por parte do professor e uma menor possibilidade de explorar situações de erro. Pelo contrário, as equipas com muitos elementos podem colocar, em algumas turmas, alguns problemas ao nível da gestão do jogo. Por isso, é boa opção formar equipas com três ou quatro alunos.

Para a realização deste jogo, como apoio ao cálculo mental, as equipas devem dispor de papel e lápis.

Exploração da tarefa. Depois da apresentação do jogo e da formação das equipas, o professor desempenha quer o papel de árbitro quer, e mais importante, o papel de questionador das respostas apresentadas pelos alunos. No caso de o número de equipas ser elevado, o professor fornece a cada uma delas uma tabela com as respostas a todas as perguntas. Dessa forma, o professor no seu papel de árbitro, garante que os alunos encontram as respostas correctas. Na segunda parte do jogo, o professor deve estar presente quando cada equipa coloca a questão final.

No seu papel de questionador, o professor estimula os alunos a expressarem como pensaram, referindo as estratégias de cálculo mental usadas. Neste papel, o professor procura compreender os procedimentos de cálculo mental dos alunos, identificando e explorando situações de erro. O professor aproveita o jogo para discutir com os alunos algumas destas situações, sublinhando boas estratégias e levando-os a corrigir erros. É importante que esta exploração seja também feita no final do jogo, seleccionando-se as cartas que colocaram mais dificuldades aos alunos.

Indicações suplementares. Este jogo pode ser realizado mais cedo na programação do tema “Números racionais não negativos” desde que o professor retire do baralho as cartas que contêm tópicos ainda não trabalhados. Outra possibilidade de explorar este jogo é seleccionar por aula duas ou três cartas do baralho, colocando a questão ou questões a toda a turma, pedindo que os alunos apresentem as suas respostas e as estratégias de cálculo utilizadas.

1

Quais dos seguintes números racionais são menores do que 1?

a) $\frac{3}{2}$

b) $\frac{23}{14}$

c) $\frac{3}{7}$

d) $\frac{14}{23}$

MEN

TAL

2

Calcula:

a) $\frac{1}{4}+1=$

b) $\frac{8}{3}-2=$

c) $\frac{1}{5}+\ldots=2$

d) $\frac{17}{2}-\ldots=2$

MEN

TAL

3

Para cada um dos números racionais seguintes, quanto falta ou passa de 1?

a) $\frac{3}{2}$

b) $\frac{23}{14}$

c) $\frac{3}{7}$

d) $\frac{14}{23}$

MEN

TAL

4

Para cada um dos números racionais seguintes, quanto falta para chegar a 2?

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{3}{5}$

c) $1\frac{1}{2}$

d) $\frac{7}{6}$

MEN

TAL

5

Descobre…

a) $\frac{1}{11}$ de ? é 1

b) $\frac{1}{5}$ de ? é 2

c) $\frac{1}{7}$ de ? é 3

d) $\frac{1}{5}$ de ? é 4

MEN

TAL

6

Calcula metade de:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{3}{4}$

c) $\frac{4}{5}$

d) $\frac{11}{10}$

MEN

TAL

7

Calcula:

a) 42,15 + 0,99

b) 34,5 - 0,9

c) 15,2 + 2,9

d) 10 - 4,9

MEN

TAL

8

Calcula:

a) 10% de 350 €

b) 25% de 480 €

c) 20% de 200 €

d) 80% de 800 €

MEN

TAL

9

Qual o valor a pagar por um *MP4* que custa 150 euros após um desconto de:

a) 50%

b) 80%

c) 10%

d) 90%

MEN

TAL

10

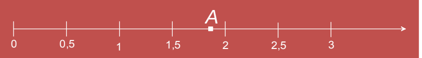
Num estacionamento estão motos e automóveis, num total de 120 rodas, $\frac{1}{5}$ das quais são de motos. O número de automóveis é:

a) 18
b) 24
c) 48
d) 96

MEN
TAL

11

Observa a figura:



O ponto A corresponde a qual dos números abaixo?

a) $\frac{1}{4}$
b) $\frac{17}{20}$
c) $1\frac{1}{4}$
d) $\frac{37}{20}$

MEN
TAL

12

O João tem 1320 cromos e o seu primo tem metade do número de cromos do João. A irmã do João tem o triplo dos cromos do primo. Quantos cromos tem a irmã do João?

a) 1980
b) 3960
c) 440
d) 660

MEN
TAL

13

A tabela a seguir contém as medidas de altura de alguns alunos do 5.º ano. Quanto mede agora cada aluno, se cada um cresceu 1%?

ALUNOS	ALTURAS
FLÁVIA	1,45 m
LEANDRO	1,50 m
CLÁUDIA	1,57 m
JOÃO	1,05 m

MEN
TAL

14

Para fazer dois tipos de bolachas, a Marta usa $\frac{1}{4}$ de uma chávena de farinha numa receita e $\frac{2}{3}$ de uma chávena igual na outra. Estima a quantidade de farinha usada nas duas receitas (em chávenas):

a) mais de metade
b) menos de $\frac{1}{2}$
c) mais de duas
d) menos de uma

MEN
TAL

15

Onde deverá situar-se o número racional não negativo que representa $\frac{13}{12} - \frac{4}{6}$?

MEN
TAL

16

Utilizando uma única vez todos os números que se seguem e as operações que conheces, de que forma podes obter a unidade?

$$\frac{3}{5};\ \frac{3}{2};\ \frac{1}{10};\ \frac{9}{5}$$

MEN
TAL

17

Num percurso de 1 km, duas amigas estão posicionadas nas marcas $\frac{7}{10}$ e $\frac{3}{5}$ do km. A que distância estão (em km) uma da outra?

a) $\frac{4}{10}$
b) 0,1
c) $\frac{4}{5}$
d) $1\frac{3}{10}$

MEN
TAL

18

Que número racional pode ser representado pela expressão $\frac{1}{2} + \frac{3}{8}$?

a) $\frac{21}{24}$
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{8}{20}$
d) $\frac{14}{8}$

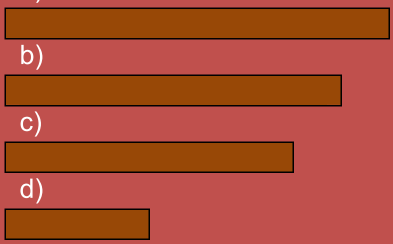
MEN
TAL

19

O Diogo comeu uma parte do seu chocolate preferido e ficou com 5/8 do chocolate.

Qual das seguintes figuras representa o chocolate inteiro?

a)
b)
c)
d)



20

Descobre...

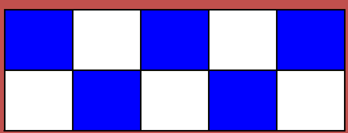
$\frac{3}{2}$ de 486

21

Descobre...

$\frac{1}{8}$ de 640

Indica a razão entre o dobro da área colorida e a metade da área não colorida da figura seguinte:

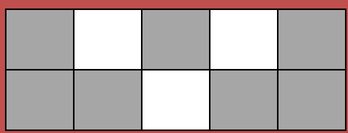


MEN

TAL

23

Que dízima é gerada pelo quociente entre o número de quadrados sombreados e o número de quadrados não sombreados da figura seguinte?

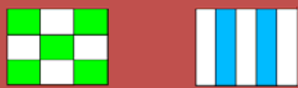


MEN

TAL

24

Tomando como unidade de medida o rectângulo maior, a soma das partes coloridas das duas figuras seguintes é:



a) $\frac{43}{45}$

b) 1

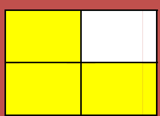
MEN

c) $\frac{47}{45}$

d) $\frac{7}{14}$

TAL

Quais das seguintes representações não traduzem a parte colorida da figura?



a) Um quarto
b) 40%
c) 0,75
d) 1- $\frac{1}{3}$

26

Calcula:

40% de 600

27

Calcula:

75% de 800

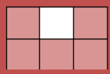
28

A Mónica recebe uma mesada de 15 euros. Como é Natal, os pais resolveram aumentar a mesada em 20%. Quanto irá receber nesse mês?

28

29

Tomando como unidade de medida o rectângulo maior, a diferença entre as partes coloridas da 1.ª e 2.ª figuras é:

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{6}$

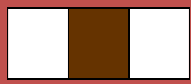
c) $\frac{3}{2}$

d) um terço

29

30

Quais das seguintes representações não representam a parte sombreada da figura seguinte?



a) 0,(3)

b) $\frac{1}{3}$

c) $1-\frac{2}{3}$

d) 0,3

30

Na loja *Super barato* uma camisola custava 80 euros. Como a Maria comprou a camisola por 60 euros, qual foi o desconto?

a) 75%
b) 25%
c) 20%
d) 15%

31

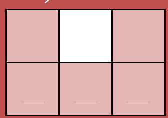
$1-\frac{1}{6}$ não é representado por:

a) Cinco sextos

b) $\frac{10}{12}$

c) 60%

d)



32

Utilizando uma única vez todos os números que se seguem e as operações que conheces, de que forma podes obter a unidade?

3; 1; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{4}$

33

Em cada uma das situações seguintes, quanto falta para igualar a unidade?

a) $\frac{9}{39}$

b) $1-\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$

d) $\frac{8}{88}$

34

Calcula:

a) $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$

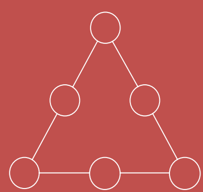
b) $\frac{7}{8}-\frac{1}{4}$

c) $\frac{3}{4}-\frac{1}{12}$

d) $\frac{1}{2}+\frac{2}{8}$

35

Coloca em cada um dos círculos os números racionais $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$ e 1, para que a soma dos números de cada lado do *triângulo* seja 2.



36

37

Qual o número racional representado por:

a) $\frac{1}{16}+\frac{1}{4}$

b) $\frac{5}{32}-\frac{1}{16}$

c) Metade de $\frac{1}{100}$

d) Um quarto de $\frac{1}{2}$

MEN

TAL

38

Na Escola do Planalto 3/5 dos seus 80 alunos obtiveram classificação *A* na prova de aferição de Matemática. Quantos alunos não obtiveram classificação *A*?

Completa:

a) $\frac{5}{9}+\ldots=\frac{2}{3}$

b) $\frac{5}{11}+\ldots=\frac{9}{11}$

c) $\ldots+\frac{3}{8}=\frac{10}{16}$

d) $\ldots+\frac{3}{5}=1$

39

$1-\frac{1}{3}$ é maior, menor ou igual a $\frac{3}{4}$?

MEN

TAL

Para preparar o bolo de chocolate, o Aniceto gastou inicialmente 1/2 litro de leite e depois mais 1/5 de litro. Que quantidade de leite usou no bolo de chocolate?

MEN

TAL

Completa:

a) $\frac{1}{6}+\ldots=\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{2}-\ldots=\frac{1}{3}$

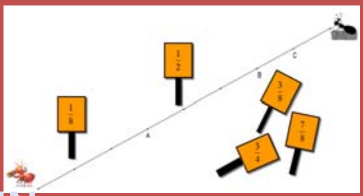
c) $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\ldots$

d) $\frac{2}{3}-\ldots=\frac{1}{2}$

42

Um quarto de quilo de morangos custa 1,25 euros. Quanto custará um quilo e meio de morangos?

Era uma vez uma formiga... que colocava placas numéricas. Que placas deve colocar nos pontos A, B e C?



MEN

TAL